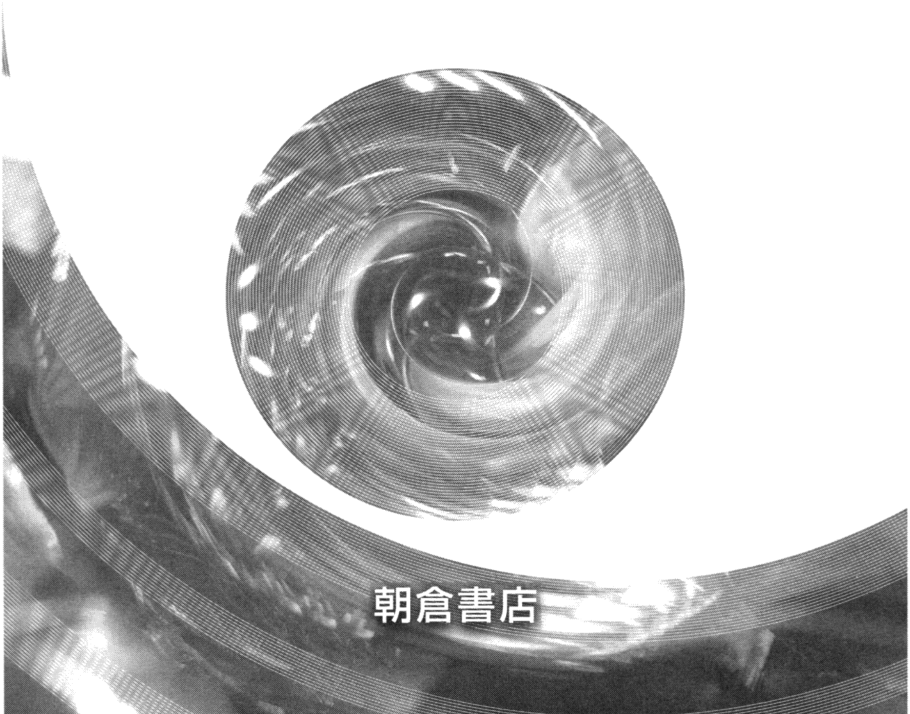
現代物理学［基礎シリーズ］

倉本義夫・江澤潤一 編集

9

宇宙物理学

二間瀬敏史
［著］



朝倉書店

まえがき

本書は学部，博士課程前期の学生を対象とした宇宙論の教科書である．宇宙論とは宇宙そのものの誕生と時間発展，その発展に伴った物質や構造の誕生や進化を取り扱う物理学の一分野である．古今東西，物語としての宇宙論は多く語られてきたが，物理学に基礎をおいた宇宙論は1940年代のビッグバン理論の提唱に始まる．1980年代にはインフレーション理論の提唱など素粒子論の進展に基づき初期宇宙の理解が大きく進み，またこの頃からはCCDや宇宙望遠鏡など新たな観測機器，装置の登場，初期宇宙の超高温・超高密度状態の名残である宇宙マイクロ波背景放射の観測などにより従来とは一線を画する詳細かつ大規模な観測が可能になり，観測から宇宙の大域的性質や銀河，銀河団などの構造の進化と性質を研究する観測的宇宙論が大きく進展した．とくに2000年代以降の宇宙マイクロ波背景放射の温度ゆらぎの観測によって，宇宙の大域的な性質についての理解は精密科学といえる段階にまでになった．観測的宇宙論の進展は現在でも継続中であり，今後も新たな観測機器，装置によって一層宇宙論について重要な情報が得られることが期待される．本書はこれらの進展に基づいた現代宇宙論の入門書である．

宇宙論の取り扱う分野は極めて広範囲で，そのすべての分野を深く理解するにはあらゆる分野の物理学を勉強する必要がある．この本は朝倉書店の基礎物理学シリーズの一環として執筆されたもので，本シリーズの他分野の本も参考になるだろう．

2014年2月

二間瀬敏史

目　　　次

1 宇宙の観測

宇宙論に関する観測は 1980 年代から飛躍的に発展し，宇宙に関する理解が深まり，そして宇宙論を精密科学の域にまで引き上げた．そこで最初に宇宙論にとって最も重要な発見とその観測的事実，その意味をまとめておこう．

その前に天文学で使われるいくつかの単位について簡単に触れておく．天文学，とくに宇宙論のような莫大な距離を問題とする場合には光年（ly），あるいはパーセク（pc）という単位が使われる．1 光年とは光が 1 年かけて進む距離である．また太陽と地球の平均距離だけ離れた 2 点から，ある距離にある天体を見ると，違う方向に見える．見える角度の違いが 1 秒角のとき，その天体までの距離を 1 パーセクという．

$$1\ \mathrm{ly} = 9.461 \times 10^{17}\ \mathrm{cm} \tag{1.1}$$

$$d\ \mathrm{pc} = \frac{1.5 \times 10^{8}}{\theta(\text{ラジアン})}\ \mathrm{km} = \frac{1}{\theta\ (\text{秒角})}\ \mathrm{pc} \tag{1.2}$$

また 1 pc = 3.26 ly である．銀河系の中の恒星の平均距離は，1 pc 程度であるが，より大きな距離を扱うときには，1 キロパーセク（kpc）= 1000 pc，1 メガパーセク（Mpc）= 1000 kpc，や 1 ギガパーセク（Gpc）= 1000 Mpc が使われる．

天体の明るさは，単位時間，単位面積あたりに受け取るエネルギー量（エネルギー流束）で決まるが，天文学では歴史的に明るさの単位として等級を使う．等級とはもともとギリシャ時代の天文学者ヒッパルコスが肉眼で見える最も明るい星を 1 等星，最も暗い星を 6 等星としたことに始まる．このことは 1 等級明るくなると $100^{1/5} \simeq 2.512$ 倍明るくなることを意味する．したがって単位波長あたりのエネルギー流束を f_λ とすると，等級は以下のように定義される．

$$m = -2.5 \log_{10} \left(\frac{f_\lambda}{f_{0\lambda}} \right) \tag{1.3}$$

ここで $f_{0\lambda}$ は 0 等級のエネルギー流速密度で歴史的にはこと座の主星ベガの値が用いられているが，最近では波長によらず 3631 Jy（ジャンスキーと呼ばれるエネルギーの単位で，1 cm^2・1 Hz あたり 10^{-23} erg のエネルギー流量を 1 Jy として定義する）を 0 等級と定義する AB 等級が使われる．正確にはベガの等級は V バンド（可視光）で 0.03 等で，これは 3530 Jy に対応する．AB 等級の定義で使われる 3631 Jy というのは，波長 568 nm（ナノメートル：1 nm = 10^{-9} m．なお 1 Å（オングストローム）= 10^{-10} m という単位もしばしば用いる．）でのベガの等級が，0.03 になるようにした値である．ただしこの等級は恒星の真の明るさを表すわけではないので，見かけの等級 (apparent magnitude) である．天体本来の明るさは絶対等級 (absolute magnitude) で表される．これは天体を 10 pc の距離に置いたときの見かけの等級として定義される．したがって見かけの等級 m の天体の絶対（実視）等級 M は次のように表される．

$$m - M = 5 \log \left(\frac{d}{10 \text{ pc}} \right) \tag{1.4}$$

ここで d は pc で測った天体までの距離である．見かけの等級と絶対等級の差 $m-M$ を，距離指標という．書き換えると，

$$d = 10^{(m-M+5)/5} \text{ pc} \tag{1.5}$$

したがって見かけの等級と絶対等級が分かれば，その天体までの距離が分かることになる．

実際にはこれほど単純ではない．星間物質による減光のほかに次のような事情も考慮しなければならない．上で定義した等級は，全放射等級（ボロメトリック等級）と呼ばれるもので天体が全波長帯で放射するエネルギーをすべて受け取ったときの等級である．これは不可能で観測装置に依存してある特定の波長帯のエネルギーを受け取るにすぎない．たとえば可視光領域（V バンドと呼ばれ波長 550.5 nm 前後）とか赤外線領域（I バンド，806 nm 前後）などである．このような場合，距離指標と距離の関係は変更を受ける．宇宙論的な観測の場合，宇宙膨張によって波長が伸びる（赤方偏移）ので，観測される波長 λ_0 と天体が放射したときの波長 λ の間にはすぐ後で示すように次のような関係がある．

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{1+z} \tag{1.6}$$

z は赤方偏移と呼ばれ，天体が放射したときの宇宙の大きさを示す量である．赤方偏移が z の宇宙とは，現在の宇宙の $(1+z)^{-1}$ の大きさのときを意味している．この関係と等級の定義を用いると，距離指標と距離の関係に対して次の式が導かれる．

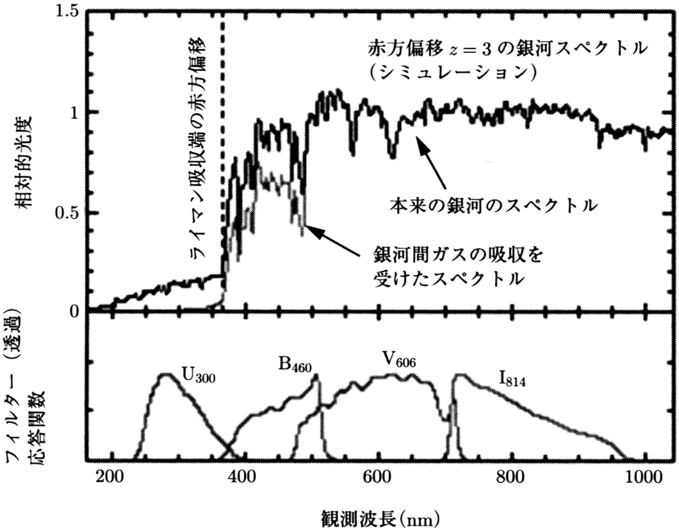
$$m_{\rm band} - M_{\rm band} = 5\log\left(\frac{d}{10\ {\rm pc}}\right) - K(z) \tag{1.7}$$

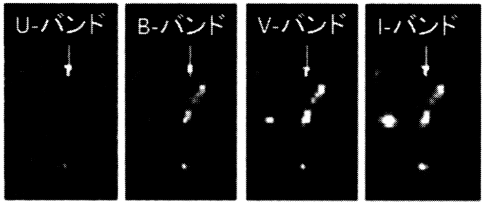
ここで，$K(z)$ は K 補正と呼ばれ次式で表される．

$$K(z) = -2.5\log\frac{\int_\Delta L\left(\frac{\lambda_0}{1+z}\right)\frac{d\lambda_0}{1+z}}{\int_\Delta L(\lambda)d\lambda} \tag{1.8}$$

ここで波長積分の積分領域 Δ は，観測する波長帯で積分するという意味である．

したがって等級にはどの波長帯での等級かを示すために添え字がつけられる．たとえば可視光で見た等級なら m_V である．波長帯による明るさの違いはより積極的な意味ももっている．天体が放射する電磁波は，その生成のメカニズムや天体の物理状態（組成や温度），そして赤方偏移によって波長依存性がある．したがって同じ天体をいろいろな波長帯で観測することで，天体の性質（組成や温度など），星間物質による減光や宇宙論的な距離など様々な情報を与えてくれる．実際の観測ではある波長帯の電磁波に対して透過性がよいフィルターを用いることで，いくつかの波長帯について観測する．地上の望遠鏡からの観測で用いられる波長帯としては波長の短い方から B バンド（444.8 nm 前後），V バンド（550.5 nm 前後），R バンド（658.8 nm 前後），I バンド（806 nm 前後）などがある．とくに遠方銀河の観測では多波長の観測から，距離を推定することが可能である．後で説明するように宇宙膨張によって遠方の銀河から放射される電磁波は波長が伸びて観測される．たとえば銀河のスペクトルで最も顕著なのは第 1 励起状態にある水素原子が基底状態に遷移するときに放射する波長 121.6 nm の電磁波（ライマン α 線）であるが，それが $121.6(1+z)$ nm の波長で観測されたとき，それを放射した銀河を赤方偏移 z の銀河という．赤方偏移 z の銀河は，宇宙が現在の大きさの $1/(1+z)$ のときの銀河である．赤方偏移が大きければ大きいほど遠方で過去の銀河である．したがって遠方銀河が放射するライマン α 線は波長が伸びて観測されるので，ある波長帯で見えていて





各波長でのフィルターを通して観測される銀河の画像

図 1.1　ライマンブレーク銀河

水素原子の電離エネルギーに対応する波長 91.2 nm より短い波長の電磁波は基底状態にある水素原子によって効率的に吸収される．したがって赤方偏移 z の銀河からの電磁波のスペクトルは，$91.2(1+z)$ nm 以下の波長で鋭くカットされる．スペクトルのこの様相をライマンブレークという．同様のブレークは水素原子の第 1 励起状態と基底状態の間の遷移（ライマン α）に対応する 波長 $121.6(1+z)$ nm でも起こる．このようなライマン線の前後のスペクトルの変化を利用して遠方銀河を探す方法を，ライマンブレーク法という．図は赤方偏移 3 の銀河でほかのバンドでは見えるが，U バンドでは見えていない．［山田亨氏より提供（C. de Jager, “M. Livio, S. M. Fall and P. Madau (eds.), The Hubble Deep Field, Space Telescope Conference Series 11”, Kluwer Academic Publishers, 1999, p.26 に基づく）］

もそれより短い波長帯では見えなくなることがある．このことを利用して遠方銀河を発見することができる（図 1.1 参照）．

1.1 宇 宙 膨 張

宇宙論の最初で，そして最も重要な発見は，宇宙膨張であろう．この発見は 1920 年代後半であるが，それまで空間が膨張しているということは想像もできなかった．

1920 年代以前，宇宙の基本的な構成要素は恒星で，無限に広がった空間に星が散らばっていると考えられていた．星の広がりの形と大きさについては古くは 18 世紀にイギリスのウィリアム・ハーシェル（W. Harchel）が自分のつくった望遠鏡で見えるかぎりの星を観測して，この集団が直径が約 5500 光年，厚さが約 1000 光年の円盤型であると考えた．私たちの太陽系はこの円盤のほぼ中央に位置し，円盤方向を見ると星が多く見えるので，それが天の川だというわけである．この星の大集団を天の川銀河，あるいは単に銀河系という．もちろんハーシェルの望遠鏡で見える星にはかぎりがあって本当の銀河系の大きさははるかに大きいし，また太陽系が銀河系の中心に位置するわけでもない．銀河系の大きさを測るには，遠方天体までの距離を正確に測る必要があるが，その方法が発見されたのは 20 世紀に入ってからであった．アメリカの天文学者リービット（H. S. Leavitt）が小マゼラン星雲内の 25 個のセファイド型変光星と呼ばれる変光星のデータから，変光周期が長いほど平均的な見かけの明るさが明るいという関係があることを発見した（図 1.2）．これらの変光星は小マゼラン星雲の中にあるからほぼ同じ距離にあると思ってよく，したがって彼女が発見した関係は変光周期が長ければ絶対的な明るさが明るいということになる．そこで別の方法，たとえば三角測量によって距離が分かる近くのセファイド型変光星を観測して，絶対的な明るさと変光周期の関係を決めておけば，より遠方のセファイド型変光星の周期を測ると，その絶対的な明るさが分かる（図 1.3）．それと見かけの明るさを比べることで，その変光星までの距離が分かることになる．こうしてどんな遠方の天体でも星々に分解できさえすれば，その中からセファイド型変光星を探し出して，その天体までの距離を測ることができる．ただし変光星にはいくつものタイプがあって，タイプごとに周期と絶対

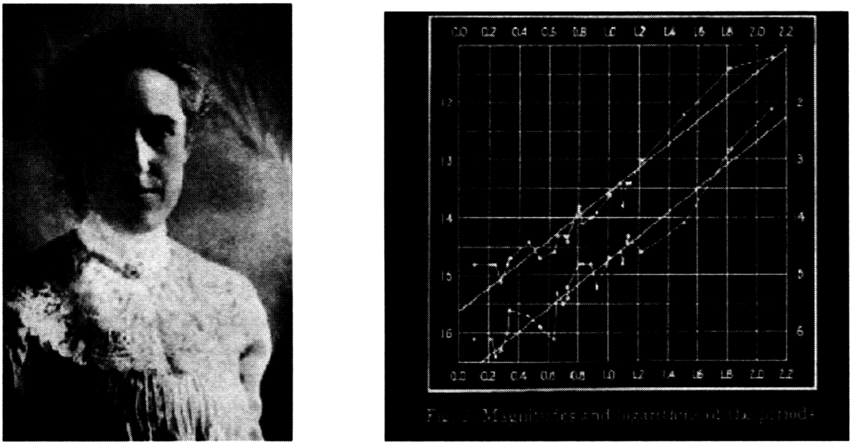


図 1.2　リービットと大マゼラン星雲中のセファイド変光星の周期・光度関係
右図の縦軸は見かけの等級，横軸は変光周期（の対数）．［H. S. Leavitt and E. C. Pickering, "Periods of 25 Variable Stars in the Small Magellanic Cloud", *Harvard College Observatory*, Circular 173, 1, 1912］

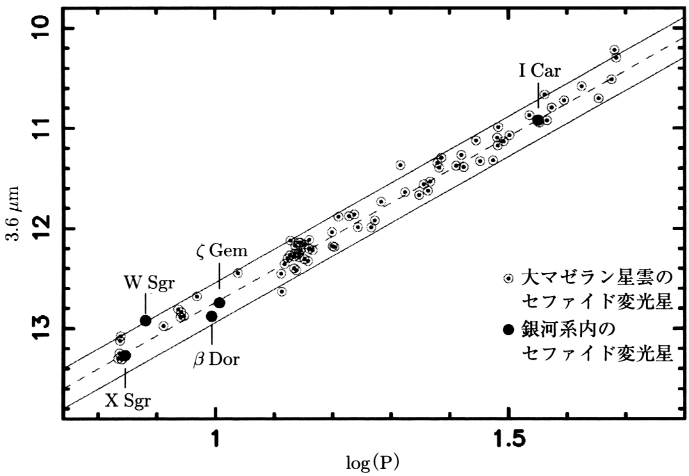


図 1.3　赤外線衛星スピッツァーによるセファイド変光星の周期・光度関係
縦軸は 3.6 μm で測った見かけの等級，横軸は変光周期 P（の対数）．W Sgr, ζ Gem などはセファイド変光星を含む天体の名称．［W. L. Freedman *et al.*, "The Carnegie Hubble Program", *AJ.*, **142**, 6, 192, 2011］

的な光度の関係が違っている．変光星のタイプの違いを混同すると距離の推定を間違えることになる．またセファイド変光星の周期・光度関係はそれが属している銀河の金属量（天文学ではヘリウムより重たい元素を金属という）に依存していることなどの補正をする必要もある．

1.1.1 赤方偏移とハッブルの法則

1920 年代の前半，アンドロメダ星雲のような一部の星雲が銀河系の内部の天体なのか，あるいは銀河系と同等の大きさをもった天体なのかという大論争があった．この論争に決着をつけたのがアメリカの天文学者エドウィン・ハッブル（E. Hubble）である．ハッブルは当時できたばかりのパロマ天文台の口径 5 m の望遠鏡を使いアンドロメダ星雲の星を分解し，その中からセファイド変光星を見つけたのである．これによってアンドロメダ星雲までの距離を 80 万光年前後と評価し，銀河系とは独立な星の大集団であることが確立された．したがって星雲ではなくアンドロメダ銀河というのが適切になった．現在ではアンドロメダ銀河までの距離は約 250 万光年と評価されている．変光星にはいくつも種類があり，種類ごとに周期と明るさの関係が違っている．ハッブルが測ったときには変光星の分類が確立しておらず間違った結果を与えたが，宇宙の広がりを銀河系の中から解放した結果には変わりがない．

ハッブルはその後，近傍銀河の距離をどんどん決めていった．その結果，遠方の銀河ほど大きな赤方偏移をもっているという傾向を発見した．これがハッブルの法則と呼ばれ，当時の宇宙観を一新する発見となった．図 1.4 に当時の観測結果を示す．赤方偏移 z は次のように定義される．

$$1 + z = \frac{\lambda_{\mathrm{r}}}{\lambda_0} \tag{1.9}$$

ここで λ_0 は光を放射したときの波長，λ_{r} は受け取ったときの波長である．実際には銀河が放射する光はその中に含まれる多数の星からの光の重ね合わせなので連続的スペクトルをもっているが，その中には特定の元素が放射する輝線（特定の波長で強い強度をもった光）があり，その波長は元素ごとに決まっているので，その輝線の波長を測定する．

さてハッブルの法則の意味を考えてみよう．赤方偏移をドップラー効果と考えると，大きな赤方偏移ほど大きい速度で遠ざかっていることを示している．

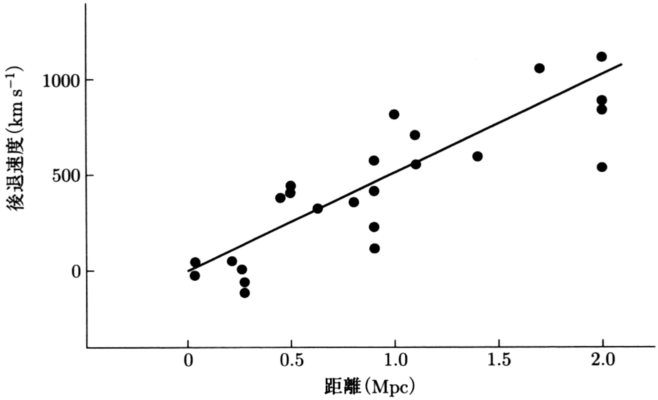


図 1.4 ハッブルの観測した銀河の後退速度と距離の関係
[E. Hubble, "A relation between distance and radial velocity among extra–galactic nebulae", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **15**, 3, 168, 1929]

したがって後退速度が光速度よりも十分小さいとすると赤方偏移 z と後退速度 V の関係は次のように書ける.

$$z = \frac{V}{c} \tag{1.10}$$

c は光速で, 2.99792458×10^8 m である. したがってハッブルの発見したことは, 銀河までの距離を d と書くと次のようになる.

$$V = H_0 d \tag{1.11}$$

ここで比例係数をハッブルパラメータ, あるいはハッブル定数と呼ぶ. ハッブルパラメータの単位は, 上式から時間の逆数であるが, 通常 [km s^{-1} Mpc^{-1}] という単位が使われる. これは 1 Mpc 離れた 2 つの銀河がお互いに後退する速度という意味を表すためである. またハッブルパラメータは一般に時間の関数であり, 添え字 0 をつけたのは, 現在の値という意味である. 本来, 速度も相対的な距離も 3 次元のベクトルなので, ベクトル同士の関係で一般的な比例関係は

$$V^i = (H_0)^i_j \, d^j \tag{1.12}$$

と書けるが, 後で述べるように空間の等方性 (どの方向も同等) から, どの方向も同じ関係式をもたねばならないので上の簡単な形となる.

この関係は我々の銀河を中心としてほとんどの銀河が遠ざかっていることを表しているが，もちろん我々の銀河が宇宙の中心にあるわけではない．この関係は，宇宙の中のどの銀河から見てもほかの銀河が距離に比例して遠ざかっているとして解釈される．この解釈が可能なのは，後退速度と距離が比例関係にあるからである．今，3 つの銀河 A，B，C を考えて AB 間の距離と相対速度を，それぞれ $\vec{d}_{AB}$，$\vec{V}_{AB}$ と書こう．BC 間，CA 間の距離，相対速度に関しても同様に書く．A を我々の銀河とするとハッブルの法則は次のように書ける．

$$\begin{aligned} \vec{V}_{AB} &= H_0 \vec{d}_{AB} \\ \vec{V}_{AC} &= H_0 \vec{d}_{AC} \end{aligned} \tag{1.13}$$

この 2 つの式を引くと

$$\vec{V}_{CB} = H_0 \vec{d}_{CB} \tag{1.14}$$

が導かれる (図 1.5)．こうして我々の銀河に対してハッブルの法則が成り立つならほかの銀河 B に対してもハッブルの法則が成り立つことが分かる．

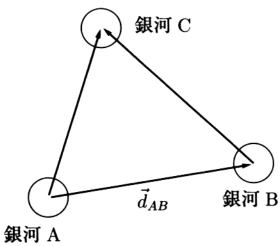


図 1.5 ハッブルの法則の意味

ではハッブルの法則をどのように解釈するのだろうか．それは銀河は空間に固定されているが，その空間自体が膨張していると考えるのである．こうして膨張宇宙というそれまで想像もしていなかった宇宙像が現れた．また膨張を過去にさかのぼると宇宙は現在よりも小さかったということになる．宇宙は無限に広がっているという可能性もあり，無限に広がった空間が小さい大きいというのは意味がないので，正確にいえば現在観測できる領域は過去にはもっと小さかったということである．したがってこの領域に含まれる物質の密度は過去に行けばいくほど大きくなり，それに伴って温度も高くなっていく．したがって

宇宙は超高密度，超高温度状態から爆発的に始まったことが推定される．この理論をビッグバン宇宙論といいロシアからアメリカに亡命した物理学者ジョージ・ガモフ（G. Gamov）によって1940年代に提案された．当初，この理論は広く受け入れられたわけではないが，後で述べる軽元素合成や宇宙マイクロ波背景放射を予言し，それらが実際に観測されることによって確かめられることになる．

さて実際の観測で求められたハッブルパラメータはあらゆる方向で同じ値をもっているわけではない．それは個々の銀河は完全に空間に静止しているわけではなく，銀河同士の距離が近ければお互いの重力によって運動し，その運動によるドップラー効果があるからである．したがって銀河の速度は

$$\vec{V} = H_0\vec{d} + \vec{V}_{\mathrm{pec}} \tag{1.15}$$

と宇宙全体で平均したハッブルパラメータに比例した部分とそれ以外の速度に分けることができる．上式右辺の第1項をハッブル流，それ以外の速度を特異速度という．ハッブル流の比例係数が宇宙膨張の速度を表すハッブルパラメータである．特異速度は大きくても秒速数百 km 程度であるので，宇宙膨張の効果をはっきりと観測するためにはハッブル流がそれ以上大きくなければならない．この条件は

$$d \geq V_{\mathrm{pec}}/H_0 \tag{1.16}$$

と書けて，特異速度がたとえば秒速500 km として，ハッブルパラメータの値として約70 km s^{-1} Mpc^{-1} を用いるとこの距離は7 Mpc 程度，すなわち2300万光年程度となる．したがってハッブルパラメータの値を正確に観測するためには，少なくともこの距離より遠い銀河の速度を調べなければならない．ハッブルが観測した銀河の多くはこの距離以下の銀河であり，図1.4を虚心坦懐に眺めたとき，「遠方の銀河はその距離に比例した後退速度をもつ」という結論は，かなり大胆であったように思える．ハッブルパラメータの測定は，1990年代に飛躍的に進んだ．まず大気に邪魔されないハッブル宇宙望遠鏡（HST）の登場によって20 Mpc（約6500万光年）を超えるような銀河中にもセファイド変光星が発見された（図1.6）．また大規模な銀河サーベイによって銀河自体を標準光源として用いる方法の精度が向上したことや超新星の爆発メカニズムの理解が進んだことなどから，さらに遠方の銀河に対しても距離がある程度正確

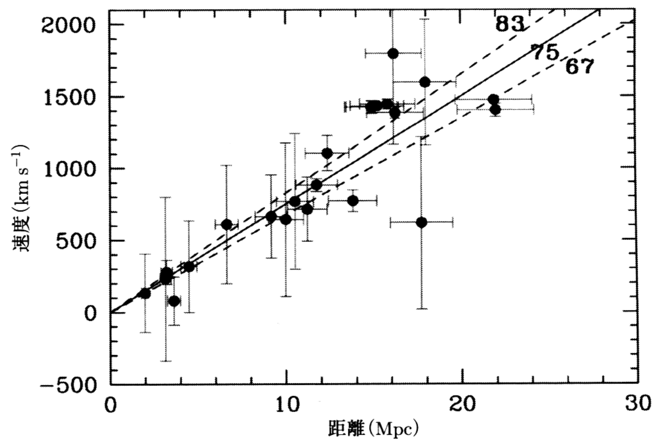


図 1.6 HST が発見したセファイド変光星によるハッブルの法則

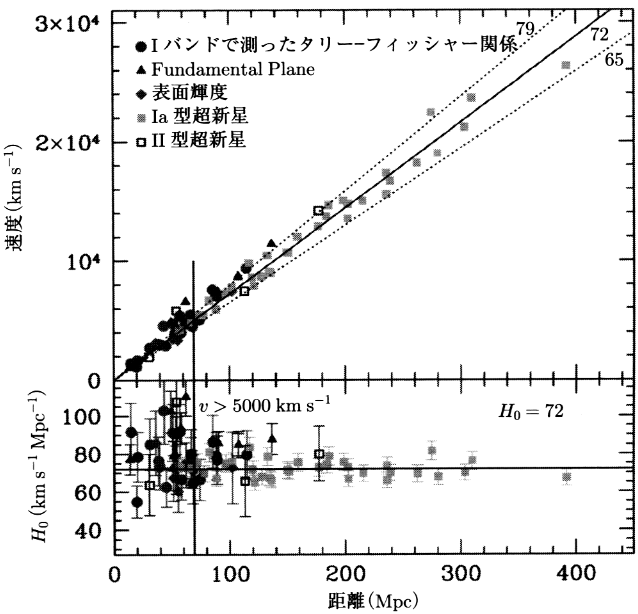


図 1.7 2001 年時点で様々な観測によって得られたハッブルの法則

●, ▲などは，それぞれ図中の方法で決めた距離．［図 1.6，1.7 の出典は W. L. Freedman *et al.*, "Final Results from the Hubble Space Telescope Key Project to Measure the Hubble Constant", *ApJ.*, **553**, 1, 47, 2001］

に測定されるようになって，2001 年頃までにはハッブルパラメータは 10%程度の精度で 72 km s^{-1} Mpc^{-1} と確定した（図 1.7）．この値はその後，第 5 章で述べる WMAP 衛星による宇宙マイクロ波背景放射観測で得られた値とも矛盾していない．最近の Planck 衛星（p.136）の観測では，これより若干小さめの

$$H_0 = 67.3 \pm 1.2 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \tag{1.17}$$

という値が得られている．

またハッブルパラメータは次のように書いて，H_0 そのものより無次元化した h を使うことが多い．

$$H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \tag{1.18}$$

したがって $h \simeq 0.67$ である．

1.1.2　ハッブルパラメータの重要性

ハッブルパラメータの値を決める観測は，宇宙膨張の発見以来綿々と続けられてきた．その理由はハッブルパラメータが宇宙の膨張率を表し時間の逆数の次元をもつからである．したがってハッブルパラメータの逆数は，宇宙の寿命，大きさ，平均密度の大まかな指標を与えてくれる．

ハッブルパラメータの逆数を，ハッブル時間といい

$$H_0^{-1} \simeq 3.1 \times 10^{17} h^{-1} \,\text{s} \simeq 9.8 \times 10^9 h^{-1} \,\text{yr} \tag{1.19}$$

となり，$h = 0.7$ を入れると約 140 億年という値となる．またハッブル時間に光速度をかけると距離が出るが，これをハッブル距離といって宇宙の大まかな大きさの目安となる．

$$cH_0^{-1} \simeq 3000h^{-1} \,\text{Mpc} \tag{1.20}$$

これから赤方偏移が小さいかぎり $z \simeq V/c$ だから赤方偏移 z の天体までの距離が

$$d(z) = cH_0^{-1} z \simeq 3000zh^{-1} \,\text{Mpc} \tag{1.21}$$

と評価できる．赤方偏移が 1 に比べて十分小さい範囲では，距離を表すのに赤方偏移を使ったり，後退速度を使ったりする．たとえば，1 万 5000 km s^{-1} ということは赤方偏移 0.05 に対応し，150 h^{-1} Mpc となる．

さらに重力定数を組み合わせると

$$\rho_{\mathrm{cr},0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.878 \times 10^{-29} h^2 \mathrm{~g~cm}^{-3} \tag{1.22}$$

という密度の次元をもった量ができる．これを臨界密度といい宇宙の密度の大まかな評価を与える．後で明らかになるが宇宙の平均密度が臨界密度以上か以下で空間の曲率が決まることになる．

任意の時刻のハッブルパラメータを使うと，その時刻での臨界密度 ρ_{cr} が得られる．エネルギー成分 X のエネルギー密度 ρ_X と臨界密度の比を密度パラメータといい，Ω_X と書く．

$$\Omega_X = \frac{\rho_X}{\rho_{\mathrm{cr}}} \tag{1.23}$$

各々の量に添え字 0 をつければ，現在の臨界密度で定義された密度パラメータが得られる．

以上，現在のハッブルパラメータを例にとって説明したが，任意の時刻でのハッブルパラメータを用いると，その時点における宇宙年齢が評価できる．

1.2 暗黒物質の発見

現在，私たちが観測する宇宙には無数の銀河が存在している．しかもその銀河の分布は一様ではなく，群れをつくる傾向がある．100 個程度以下の銀河の集団を銀河群，それ以上の集団を銀河団という．銀河団は 10 Mpc 程度のスケールをもち宇宙の中で最も大きな自己重力系である．しかしその銀河団もお互いの重力で群れをつくる傾向がある．この集団を超銀河団という．膨張している宇宙の中でこのような構造をつくるためには，直接観測できる天体の重力だけでは不十分で重力源として電磁波を放射せず天文学の通常の手段では直接観測できない大量の物質が必要である．この物質を暗黒物質という．

暗黒物質はまだ直接検出されてはいないが，宇宙全体では陽子や中性子からできている通常の物質（バリオン物質という）の数倍存在し，その重力の影響で構造形成に重要な役割をすると考えられている現代宇宙論で最も重要な要素の 1 つである．

1.2.1 暗黒物質の状況証拠

暗黒物質（dark matter）という言葉は古く，すでに1922年のカプタイン（J. Kapteyn）の論文に現れている．この論文でカプタインは太陽系近傍の星の運動から太陽系付近の質量分布を調べようとした．この研究はオールト（J. H. Oort）によって引き継がれ，1932年の論文では観測できる質量以上の質量が存在する可能性を指摘した．さらに1937年，ツビッキー（F. Zwicky）は，かみのけ座銀河団の銀河の運動の観測から，暗黒物質の存在の可能性を強く示唆した．銀河団がその形を保てるのは個々の銀河がランダムな運動をして重力に対抗しているからである．銀河団が力学平衡状態にあるとすると，次のように質量を評価できる．力学平衡では，運動エネルギーの時間平均 $\langle T\rangle$ とポテンシャルエネルギーの時間平均 $\langle V\rangle$ の間にはビリアル定理が成り立つ．

$$2\langle T\rangle + \langle V\rangle = 0 \tag{1.24}$$

各々のエネルギーを評価してみよう．簡単のため銀河団を半径 R の球として，その中に N 個の同じ質量 m をもった銀河があるとする．

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{3}{2} N m \langle\sigma^2\rangle \tag{1.25}$$

ここで $\langle\sigma^2\rangle$ は視線方向の速度の二乗平均である．一方，ポテンシャルエネルギーを半径 R，質量 $M = Nm$ の一様球のポテンシャルで近似すると，

$$V = -\frac{GM^2}{R} \tag{1.26}$$

こうしてビリアル定理から次の関係が得られる．ここでかみのけ座銀河団の数値 $R \simeq 3$ Mpc, $\sigma \simeq 1000$ km s^{-1} を代入すると，

$$M = \frac{3\langle\sigma^2\rangle R}{G} \simeq 2 \times 10^{15} M_\odot \tag{1.27}$$

ここで $M_\odot \simeq 1.99 \times 10^{33}$ g は太陽質量である．この評価はかなり大ざっぱではあるが，重力レンズを用いて最近推定された質量 $1.2 \times 10^{15} M_\odot$ とそれほど違っていない．この質量が銀河団内の銀河による質量よりはるかに大きなことは次のようにして推定される．まずかみのけ座銀河団までの距離が分かっているのでメンバー銀河の見かけの明るさから各々の絶対光度が分かり，それを足し合わせれば，かみのけ座銀河団の絶対光度が推定される．

$$L \simeq 5 \times 10^{12}\, L_{\odot} \tag{1.28}$$

ここで $L_{\odot} \simeq 3.84 \times 10^{33}\,\mathrm{erg}$ は太陽の絶対光度である．したがって

$$\frac{M}{L} \simeq 400 \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}} \tag{1.29}$$

となる．これはかみのけ座銀河団には光で指定されるよりも約 400 倍の質量が含まれていることを意味する．

さて暗黒物質はその性質から電磁波を受信する通常の望遠鏡では直接観測することはできないが，上に述べた以外にもその状況証拠は存在する．たとえば円盤銀河の平坦な回転曲線と呼ばれるものがある．これは円盤銀河には，円盤部を大きく取り巻く中性水素ガスが存在するが，この水素ガスは円盤部と同様に銀河中心周りを回転している．この回転運動は水素原子が出す波長 21 cm の電波で観測することができ，それによると回転速度は円盤部を大きく超えてもほとんど一定の値になっている（図 1.8）．もし質量が円盤部だけに集中しているとすると，円盤部から離れれば離れるほど重力は弱くなり，それに釣り合う遠心力も小さくなるから回転速度は小さくなるはずである．遠心力と重力のバランスは，$M(r)$ を中心からの距離 r 以内に含まれる質量とすると，ケプラーの法則から

$$V^2 = \gamma \frac{GM(r)}{r} \tag{1.30}$$

と書ける．ここで γ は質量分布の形状による数値で 1 のオーダーの量である．

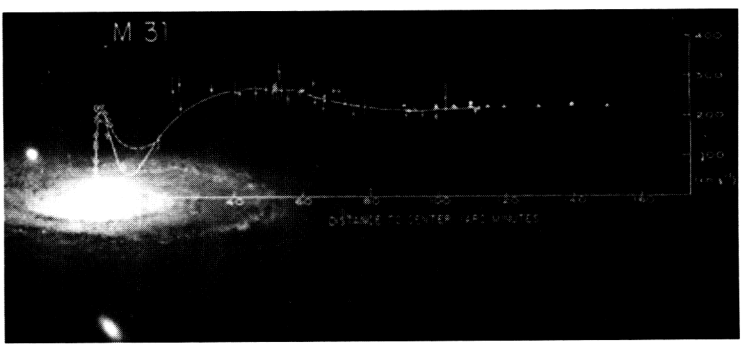


図 1.8 アンドロメダ銀河の回転曲線

[V. Rubin, "Seeing dark matter in the Andromeda galaxy", *Physics Today Online*, **59**, 12, 8, 2006]

もし回転速度が一定なら，この式から $M(r) \propto r$ となる．したがって円盤部を超えて質量が距離とともに増加していることになる．これは暗黒物質の広がりが円盤銀河を大きく囲んでいると解釈されている．円盤銀河ばかりでなく楕円銀河や矮小銀河などすべての銀河，銀河団なども暗黒物質に取り囲まれていると考えられている．天体周りの暗黒物質の広がりを，暗黒物質ハローという．暗黒物質ハローの存在は，X 線の観測からも支持されている．楕円銀河や銀河団には 10^7 K あるいはそれ以上の高温ガスが大量に存在し，それが X 線を放出している．この高温ガスを楕円銀河や銀河団内に閉じ込めるには，見えている質量だけでは不十分で暗黒物質が必要であることが分かる．

さらにより直接的な証拠も存在する．暗黒物質はその重力によって光の電波に影響を及ぼし重力レンズという現象を引き起こす．図 1.9 は銀河団 A370 で観測されている重力レンズ現象を示した．これは銀河団の重力によって背景銀河からの光が曲げられてアーク状の像として観測される例である．このアークの像から銀河団の重力が推定され，そしてその重力を及ぼす物質の量と分布が推定されるが，それは光で見えている銀河団のメンバーの銀河の質量をはるかに超えている．このような重力レンズ現象は多数観測されていて暗黒物質の存

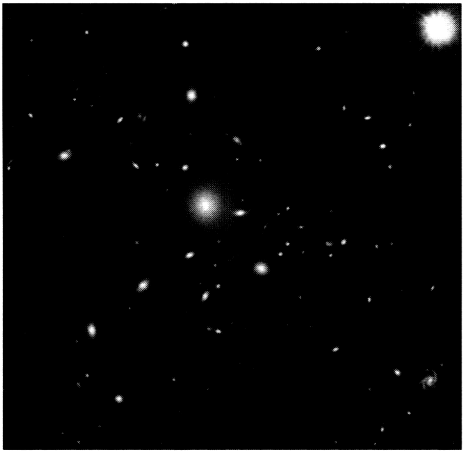


図 1.9 銀河団 Abell383 の巨大アーク（HST による観測）
赤方偏移 0.187（約 25 億光年）かなたの銀河団が $z = 1.01$（約 80 億光年）にある背景銀河をゆがめてアーク状のイメージをつくっている．［NASA 提供］

在は疑いのないものになっている.

1.2.2 暗黒物質の候補と観測の現状

暗黒物質の候補として弱い相互作用しかしない素粒子が考えられる. たとえばニュートリノである. 第3章で見るようにニュートリノは現在の宇宙に1 cm^3 あたり112個程度と宇宙背景放射の光子と同じ程度に存在する. したがってニュートリノに質量があれば, そのエネルギー密度は

$$\rho_{\nu,0} \simeq 112 \sum_{\text{non-rel.}\nu} m_\nu c^2 \tag{1.31}$$

となる. ここで和は3種類のニュートリノのうち非相対論的なニュートリノに対する和である. これから対応する密度パラメータは次のようになる.

$$\Omega_{\nu,0} h^2 \simeq 0.3 \left(\frac{\sum m_\nu}{30 \text{ eV}} \right) \tag{1.32}$$

素粒子実験や後で述べる銀河分布の観測などから, ニュートリノの質量は3種類全部足しても0.8 eV以下ということが分かっているので暗黒物質の主成分にはなり得ない. したがって現在発見されている素粒子の中には暗黒物質となるものは存在しない.

しかし暗黒物質の候補はまだ発見されていない素粒子の中に存在すると期待されている. その最も有力な暗黒物質の候補は, ニュートラリーノと呼ばれる素粒子である. 自然界に存在する重力, 電磁気力, 弱い力, 強い力の4つを統一するには, ボソンとフェルミオンを対称的にとりあつかう超対称性が必要と考えられており, そのような理論ではたとえばボソンである光子に対してフェルミオンのフォティーノと呼ばれる中性粒子が存在する. 超対称性が厳密に成立しているとフォティーノの質量も光子同様0になるが, 現在の宇宙では超対称性が成立していないためフォティーノはある質量をもつ. このような中性のフェルミオンのある種の組合せがニュートラリーノで, 100 GeV前後の質量をもつと考えられている. このような大きな質量をもつ素粒子を暗黒物質とすると, 以下で述べるように銀河分布の観測をよく説明することも知られている.

このほか, 暗黒物質として, 質量が小さく恒星になりそこなった星, 中性子星, ブラックホールなどの暗くて観測できない小天体が銀河の周りに存在する可能性が考えられる. このような天体をMACHO (massive astrophysical

compact halo objects）という．MACHO が遠方の星と地球を結ぶ直線上にあれば，MACHO の重力によって星からの光が曲げられる．したがって遠方の星の視線を MACHO が横切ると，その間，星の明るさが増加する．検証はマゼラン星雲の数億個にも及ぶ星の明るさをモニターして行われ，10 個程度の候補現象が観測されている．この結果から，MACHO は存在したとしても銀河を取り巻くハローの総質量の 10%程度しか説明できない．また宇宙初期の元素合成の理論と観測との比較から，宇宙のバリオン量に厳しい制限がついており，これらのことから MACHO は暗黒物質の主要な成分ではないことが分かっている．

暗黒物質粒子は宇宙全体ではバリオン物質の数倍もあるが，数密度としては 1 リットルあたり 1 個程度である．この暗黒物質を検出しようとする観測や実験が行われている．CDM（1.2.3 項）の有力候補であるニュートラリーノ同士が衝突すると，ごくまれに消滅し高エネルギー粒子やガンマ線としてエネルギーを解放する．銀河や銀河団の周りの暗黒物質ハローは一様に暗黒物質が分布しているわけではなく，何千個もの大小様々な塊（部分ハロー）をつくり運動している．このような部分ハローからのガンマ線を検出することで，暗黒物質を観測することが可能である．宇宙からの様々なガンマ線を観測するため 2008 年，NASA が打ち上げた衛星（通称 Fermi 衛星）で暗黒物質探査が行われている．この観測では銀河系内天体からのガンマ線による影響のため銀河系ハローからのガンマ線の同定は困難であるが，銀河系近傍の矮小楕円銀河の暗黒物質からのガンマ線に対して最も感度が高い．矮小楕円銀河は暗黒物質ハローに対するバリオン物質の割合が小さいため，バリオン物質が放射するガンマ線の影響を受けにくいことも利点である．しかしながらこれまでのところ近傍の 10 個の矮小楕円銀河から暗黒物質起源と思われるガンマ線は観測されていない．このことから暗黒物質粒子の質量に対して約 30 GeV 以上であるという制限が得られている．またニュートラリーノの対消滅によってできる高エネルギー電子・陽電子対の観測も国際宇宙ステーションに搭載されている検出器で行われている．

また暗黒物質粒子が原子核と衝突すると，まれに原子核を跳ね飛ばすが，跳ね飛ばさた原子核はチェレンコフ光を出す．この微弱な光を検出する実験装置が東京大学宇宙線研究所によって岐阜県飛騨市神岡鉱山に設置され，2011 年から観測が行われている．以上の観測・実験によって近い将来暗黒物質のより確実な検出が期待されている．

1.2.3 暗黒物質と構造形成

銀河，銀河団などが暗黒物質にとり囲まれているという観測は，これら天体の形成に暗黒物質が重要な役割を果たしていることを強く示唆している．実際，現代宇宙論における構造形成理論は次のように考えられており暗黒物質抜きに語ることはできない．

現在の宇宙で観測される銀河などの天体は宇宙初期のバリオン物質分布の微小な揺らぎが成長してできたと考えられている．ここで密度揺らぎという言葉の意味を定義しておこう．ある時刻，ある位置にある密度を $\rho(\vec{x},t)$，空間全体で平均した密度を $\bar{\rho}(t)$ と書いたとき，次のように定義される量 δ を密度揺らぎという．

$$\rho(\vec{x},t) = \bar{\rho}(t)\,(1+\delta(\vec{x},t)\,) \qquad (1.33)$$

したがって揺らぎとは平均からのずれの程度を表す量である．たとえば地球は半径約 6360 km の球形であるが，山もあれば深い海もある．一番高いヒマラヤのエベレストの標高は 8848 m で一番深いマリアナ海溝の深さは 1 万 920 m といわれている．そこで半径 6360 km の球に ± 10 km 程度の凹凸があると考えると，揺らぎは 636 分の 1 ということになる．

では宇宙のはじめにはどれだけのバリオン密度の揺らぎがあったのだろう．これは以下に述べる宇宙マイクロ波背景放射の温度揺らぎの観測から分かっていて，ビッグバンから 38 万年後（この時点を宇宙の晴れ上がりという）の時点で 10 万分の 1 程度である．上の地球の例でいえば，65 m 程度の凸凹である．一方，ビッグバンの 38 万年後から現在まで宇宙は約 1100 倍に膨張している．それに伴って密度揺らぎは 1100 倍に成長することが知られている．したがって宇宙の晴れ上がりで 10 万分の 1 の揺らぎは現在までに 100 分の 1 程度の揺らぎに成長しているにすぎないのである．現在の宇宙の平均密度は上で見たように 10^{-29} g cm^{-3} 程度なので，密度の高い領域があったとしてもこの 100 分の 1 程度しか高くないということである．これではどんな天体もつくることができない．しかし現実の宇宙は無数の星や銀河で満ちている．

この明らかな矛盾は暗黒物質の存在を考えると解決することができる．宇宙の晴れ上がりの時点ですでに暗黒物質には大きな（といっても 1000 分の 1 程度で十分である）密度揺らぎがあったとするのである．暗黒物質の揺らぎは，放

射と相互作用しないというその性質上，宇宙マイクロ波背景放射の温度揺らぎに大きな影響を与えないので，この程度の揺らぎが宇宙の晴れ上がりの時点で存在してもかまわない．晴れ上がり直後，バリオン物質は暗黒物質の揺らぎの高密度部分の重力によって引き付けられて密度が急速に上昇し，暗黒物質のハローの中でバリオン物質の密度がどんどん成長し天体が形成されるのである．ただどのような暗黒物質でもいいというわけではなく，現在観測される物質分布の構造を説明するものでなければならない．

上で暗黒物質の候補としてニュートリノとフォティーノに触れたが，暗黒物質は大別すると冷たい暗黒物質（cold dark matter：CDM）と熱い暗黒物質（hot dark matter：HDM）に分けることができる（このほか，CDM と HDM の中間的な性質をもつ暖かい暗黒物質（warm dark matter：WDM）を考えることができるが，ここでは触れない）．

CDM とは例外はあるが質量が数 GeV から数百 GeV をもち光速度より十分小さい速度をもつ粒子（正確にはビッグバンから数万年後，等密度時と呼ばれる物質密度と放射密度が等しくなる時点での速度が非相対論的になる粒子）でニュートラリーノがその代表である．一方，HDM は質量が非常に小さくほぼ光速度で運動する粒子（等密度時の速度が相対論的な粒子）で，ニュートリノがその例である．CDM と HDM では天体形成の歴史や，その結果の空間分布がまったく違ってくる．

HDM の場合，DM の密度揺らぎは DM 粒子がほぼ光速で運動するため，小さなスケールの密度揺らぎは消されてしまう．このスケールは，宇宙の温度が DM 粒子の質量エネルギーに相当する温度に下がるまでに DM 粒子が進んだ距離として見積もることができる．詳しい計算によると，このスケールは

$$L_{\mathrm{FS}} \simeq 25\left(\frac{m_\nu}{1\ \mathrm{eV}}\right)^{-1}\mathrm{Mpc} \tag{1.34}$$

と評価される．こうして暗黒物質が HDM だとすると，最初に形成される天体はこのスケール以上で，その後，小さな天体ができていく．このような構造形成のシナリオをトップ・ダウンという．

一方，CDM の場合，小さなスケールの揺らぎは消されずに残り，最初に小さな天体ができ，それがお互いの重力で集合，合体してどんどん大きな天体が形成される．このような構造形成のシナリオをボトム・アップという．現在す



図 1.10 かみのけ座銀河団中心部の暗黒物質分布
かみのけ座銀河団は赤方偏移 0.0236（約 3.4 億光年かなた）にあり数千個の銀河を含んでいる巨大な天体である．その暗黒物質を含めた全質量は太陽質量の 8×10^{14} 倍にも及ぶ．宇宙論的な意味では我々の近くにあるため天球上での面積は満月の数十倍にもなり，内部構造が重力レンズによって「見える」．本図では銀河団中心部の暗黒物質分布を薄い色で重ねて表示している．［岡部信広氏（カブリ数物連携宇宙研究機構）提供］

でに赤方偏移が 10 程度（ビッグバン後 5 億年弱）の原始銀河の候補が発見されていることや，銀河の 3 次元分布の観測，銀河団中にボトム・アップシナリオから期待されるような暗黒物質の部分ハローが観測されている（図 1.10）ことなどから，暗黒物質の主要な成分は CDM と考えられている．

Planck 衛星の観測から CDM の密度パラメータとして次の値が得られている．

$$\Omega_{\mathrm{CDM},0} h^2 = 0.1199 \pm 0.0027 \tag{1.35}$$

一方，バリオンの密度パラメータは

$$\Omega_{b,0} h^2 = 0.02205 \pm 0.00028 \tag{1.36}$$

という非常に精密な値が得られている．ハッブルパラメータの値として $h = 0.673$ を使うと，$\Omega_{\mathrm{CDM},0} \simeq 0.267$, $\Omega_{b,0} \simeq 0.049$ が得られる．こうして宇宙全体では CDM が通常のバリオン物質の 5 倍ほど多いことが分かっている．

1.3 宇宙マイクロ波背景放射と温度揺らぎの発見

宇宙膨張を素直に受け入れると宇宙は過去にさかのぼるほど高密度だったことになる．断熱的に物質を圧縮すれば熱くなるように宇宙も高密度になるにつれ高温度になっただろう．このときの物質は原子や分子など私たちの身の周りにある形態ではなく，高エネルギーの光子との衝突によって原子核と電子に分解され，それらが自由に運動するプラズマ状態と呼ばれる形態だったはずである．このとき放射（光子）は電子や陽子によって散乱を繰り返し物質と一体となって熱平衡状態が実現されていた．これがビッグバン理論の予言である．熱平衡状態とは物質と放射の間にエネルギーのやり取りが十分速く起こり物質と放射が同じ温度になっている状態である．このとき放射のスペクトルは温度だけで決まるプランク分布という形になることが知られている．したがって宇宙初期にはプランク分布をもった放射が充満していたことになる．現在，この放射は宇宙膨張によって波長が伸び，マイクロ波として存在する．この放射を宇宙マイクロ波背景放射（cosmic microwave background radiation：CMB）という．したがって CMB を発見すれば，ビッグバン理論が検証されることになる．

1.3.1 CMB の発見

CMB 光子がバリオン物質と熱平衡にあるのは宇宙初期でだけで，現在は CMB 光子とバリオン物質は相互作用がなく，したがって熱平衡状態ではない．しかし光子の運動量がスケール因子に反比例することから，放射のスペクトルの形は変わらないことが導かれる．実際，ある時刻 t_* で温度 T_* の熱平衡にあれば，角振動数が ω と $\omega + d\omega$ の微小区間の光子粒子数密度 $n(\omega)$ は次のプランク分布となる．

$$dn(\omega) = \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 d\omega}{\exp(\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T_*) - 1} \tag{1.37}$$

（$\hbar$, k_{B} については (1.40) を参照.）ここで光子の運動量は波長に反比例するので，宇宙がスケール因子 $a(t)$ に従って膨張したとき，光子の角振動数は $\omega(t) = a_*/a(t)\omega_*$（$a_* = a(t_*)$）と変化する．また宇宙膨張によって光子数は変化しないとすると，時刻 t の光子の分布関数は次のように書ける．

$$dn(\omega(t)) = \left(\frac{a_*}{a(t)}\right)^3 dn(\omega_*) = \frac{1}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^2 d\omega}{\exp(\hbar\omega a(t)/k_{\rm B}T_* a(t)) - 1} \quad (1.38)$$

これは温度が $T(t) = a_* T_*/a(t)$ のプランク分布である．こうして宇宙膨張により温度は低下し物質と放射はある時点で熱平衡状態ではなくなるが，放射のスペクトルは低下した温度のプランク分布に保たれる．このときの T はスペクトルの形を決めるパラメータとしての意味しかないが，宇宙の温度と呼ぶことにする．

1965 年，この放射がアメリカの電波天文学者ペンジアス（A. Penzias）とウィルソン（R. Wilson）によって偶然発見された．彼らは衛星通信用の電波望遠鏡を天体観測に使おうと考えていた．天体からの微弱な電波を受信するために，種々の雑音を取り除こうとしていた際に，どうしても取り除けない波長 7.35 cm の電波に遭遇した．この電波は特定の方向からではなく，宇宙のあらゆる方向からやってきていていた．そのすぐ後に，波長 3.2 cm の電波でも観測された．その結果，この電波が絶対温度が約 3 K の物質が放射するマイクロ波に対応し，まさにビッグバン理論が予言する宇宙マイクロ波背景放射だったのである．

彼らが発見したマイクロ波が実際にプランク分布であることは，1989 年になって NASA が打ち上げた COBE と呼ばれる衛星によって確認され，その温度が 2.725 K であることが示された (図 1.11)．こうしてビッグバン宇宙論は現代宇宙論の定説となったのである．ここで現在観測されている CMB の特徴をまとめておこう．観測された放射強度は，$T_{\rm CMB} = 2.725$ K をもったほぼ完璧なプランク分布である．これに対応して，そのエネルギー密度，エントロピー密度，数密度，1 粒子あたりの平均エネルギー，密度パラメータはそれぞれ以下のようになる．

$$\rho_{\rm CMB}c^2 = \frac{\pi^2 k_{\rm B}^4}{15 c^3 \hbar_{\rm pl}^3} T_{\rm CMB}^4 = 4.17 \times 10^{-13}\left(\frac{T_{\rm CMB}}{2.725\ {\rm K}}\right)^4 {\rm erg\ cm^{-3}}$$
$$s_{\rm CMB} = \frac{4}{3}\frac{\rho_{\rm CMB}}{T_{\rm CMB}} \simeq 2.91 \times 10^3 \left(\frac{T_{\rm CMB}}{2.725\ {\rm K}}\right)^3 {\rm cm^{-3}}$$
$$n_{\rm CMB} = \frac{2\zeta(3)}{\hbar^3\pi^2 c^3}(k_{\rm B}T_{\rm CMB})^3 \simeq 410\ {\rm cm^{-3}}$$
$$\epsilon_{\rm CMB} = \frac{\rho_{\rm CMB}c^2}{n_{\rm CMB}} = \frac{\pi^4}{30\zeta(3)} k_{\rm B}T_{\rm CMB} \simeq 2.70 k_{\rm B}T$$

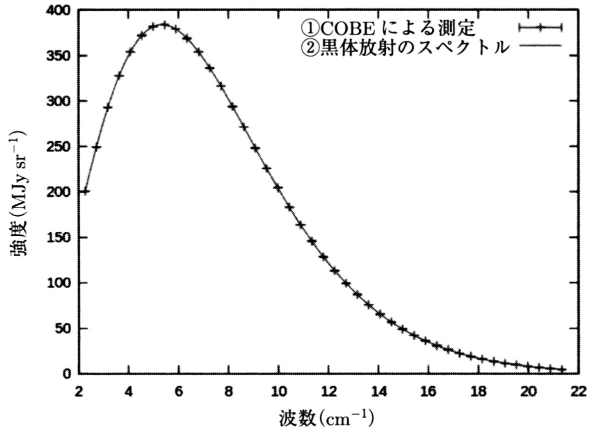


図 1.11　宇宙マイクロ波背景放射観測衛星 COBE が測定した CMB のスペクトル
観測データが①，②は絶対温度 2.727 K の黒体放射のスペクトル．sr は立体角の単位，ステラジアンである．［NASA］

$$\Omega_{\rm CMB} = \frac{\rho_{\rm CMB}}{\rho_{\rm cr,0}} \simeq 2.47 \times 10^{-5} h^{-2} \tag{1.39}$$

ここで $\zeta(3) \simeq 1.202$ は次数 3 のリーマンゼータ関数，$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったもの（ディラック定数とも呼ばれる），$k_{\rm B}$ はボルツマン定数である．

$$\begin{aligned} \hbar &= 1.05 \times 10^{-27}\,{\rm erg\ s} = 6.58 \times 10^{-16}\,{\rm eV\ s} \\ k_{\rm B} &= 1.38 \times 10^{-16}\,{\rm erg\ K^{-1}} = 8.62 \times 10^{-5}\,{\rm eV\ K^{-1}} \end{aligned} \tag{1.40}$$

以下，ボルツマン定数を 1 とおく．温度をエネルギーというときには，$k_{\rm B}$ をかけていることに注意する．また $c = \hbar = 1$ という単位系を用いる．

CMB 光子の数密度，あるいはエントロピーとバリオンの数密度の比は，宇宙初期に何らかのメカニズムで決まって以降変化せず，我々の宇宙を特徴づけている 1 つのパラメータである．バリオン数密度と光子数密度の比を η と書いて，バリオン・光子比という．

$$\eta = \frac{n_b}{n_{\rm CMB}} = \frac{\Omega_{b,0}\rho_{\rm cr,0}}{n_{\rm CMB}} \simeq 6.05 \times 10^{-10} \left(\frac{\Omega_{b,0} h^2}{0.022} \right) \tag{1.41}$$

この莫大な数の違いが宇宙初期のいつ，どのようなメカニズムで決まったのかは，バリオン数非対称性の問題と呼ばれ，まだよく分かっていない（第 6 章参照）．

プランク分布をもった放射がごくわずかでも存在することは，宇宙初期で放

射のエネルギー密度の方が物質のエネルギー密度よりも大きかったことを意味している．これは放射の物質のエネルギー密度のスケール因子依存性を考えれば分かる．放射の温度はスケール因子に反比例し，エネルギー密度は温度の 4 乗に比例するので，エネルギー密度はスケール因子の 4 乗に反比例する．一方，物質のエネルギー密度は，スケール因子の 3 乗に反比例する．これは物質のエネルギー密度は静止質量エネルギーによるものであり粒子数は宇宙のごく初期を除いて宇宙膨張によって変わらないからである．これらのことから時間をさかのぼる，すなわちスケール因子が小さくなるにつれ放射のエネルギー密度の方が速く大きくなり，初期のある時点で放射のエネルギー密度と物質のエネルギー密度が等しくなることが導かれる．この時点を等密度時といい，赤方偏移が約 3400，ビッグバンから約 5 万 1000 年後のことである．等密度以前の宇宙を放射優勢期，その後の宇宙を物質優勢期という（ただし後で述べるように現在の宇宙は加速膨張をしており暗黒エネルギーがエネルギーの主要な成分となっている）．

1.3.2　CMB の温度揺らぎ

また 1992 年，COBE 衛星は長い間研究者たちがその存在を確信していた CMB の温度揺らぎを発見した．温度揺らぎというのは，観測する方向によって CMB の温度が違うことを意味する．観測ではこの違いは平均値 $T_{\mathrm{CMB}} = 2.725$ K の 10 万分の 1 程度にしかすぎない．

$$\frac{\delta T(\Delta\theta)}{T_{\mathrm{CMB}}} = \frac{T(\vec{n}_1) - T(\vec{n}_2)}{T_{\mathrm{CMB}}} \simeq 10^{-5} \tag{1.42}$$

ここで $\Delta\theta$ は方向 $\vec{n}_1$ と $\vec{n}_2$ の間の角度で，COBE の観測では 7 度程度である．この発見は宇宙の等方性を示すものであったが，同時に宇宙における構造形成に大きな疑問を投げかける発見でもあった．というのは 1000 分の 1 程度の温度揺らぎ（方向による放射の温度の違い）があると期待していたからである．

この理由を説明しよう．まず現在我々が観測している CMB は宇宙の温度が約 3000 K，ビッグバンから約 38 万年後の時点で放射されたものである．温度が 3000 K 程度に下がると陽子が電子を捕獲して水素原子となる．すると光子は水素原子に散乱されることなく，その後，宇宙を直進して現在まで届くのである．これを宇宙の晴れ上がり，あるいは宇宙の再結合という．晴れ上がり以

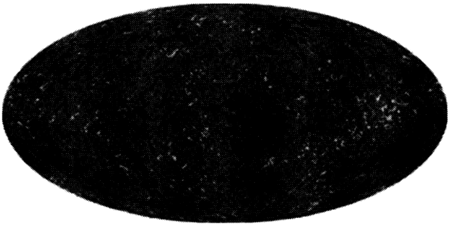
前の宇宙では光子は電荷をもったバリオン物質（陽子と電子）によって頻繁に散乱され，バリオン物質と放射は1つの流体のように一体となって運動していた．これを光子・バリオン流体と呼ぶ．光子・バリオン流体には粗密波（音波）がたち，密度の大きいところと小さなところが波として伝わっていた．宇宙の晴れ上がりによって，まるで雲が晴れ上がったように放射は何物にも散乱されずに直進できるようになる．

今，暗黒物質を忘れてみよう．光子・バリオン流体に存在した音波によって宇宙の晴れ上がりの時点でバリオン物質分布には凹凸がある．物質密度が高いところは温度が高く，低密度のところは温度が低くなる．また高密度領域では重力が強くなるので，そこから放射された光子はエネルギーを失い（重力赤方偏移），結局，温度が低くなる（Sacks–Wolfe 効果）．この2つの効果によって観測される CMB はやってくる方向によって温度にわずかな揺らぎを生じる．これを CMB の温度揺らぎといい，その振幅はバリオン物質分布の揺らぎ程度であることが知られている．したがって温度揺らぎが発見されれば，宇宙が晴れ上がった時点でその程度のバリオン物質分布の揺らぎがあるということになる．バリオン物質密度の揺らぎがあると，高密度領域は重力によって周りの物質を引き付けてより密度を高くしていく．こうして密度揺らぎの大きさが1程度，すなわち平均密度の2倍程度に成長すると一気に収縮が進み天体ができる．ただし宇宙が膨張しているため引き付けるべき周りの物質の密度は低くなっている．したがって重力による密度揺らぎ成長は宇宙膨張によって阻害されることになる．これによって密度揺らぎの成長は宇宙膨張がない場合にくらべてはるかに遅くなる．第4章で示すが，宇宙膨張がある場合，密度揺らぎは宇宙膨張を表すスケール因子と同じように成長する．これは宇宙が2倍に広がれば，密度揺らぎも2倍になるということである．宇宙の晴れ上がりから現在まで宇宙は約1100倍膨張しているので，晴れ上がりの時点で1000分の1程度のバリオン物質の密度揺らぎがあれば，現在までに1程度の揺らぎに成長し天体をつくることができると考えられるのである．

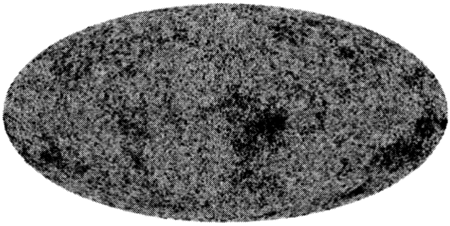
ところが CMB の温度揺らぎの観測は，宇宙の晴れ上がり時点で10万分の1程度のバリオン物質の密度揺らぎしか存在しないことを示した．このことはバリオン物質だけの重力では銀河ができないことを意味し，暗黒物質が必要であることを強く示唆するのである．その後，NASA が打ち上げた CMB 観測衛



(a)



(b)



(c)

図 1.12 CMB 温度揺らぎの空間分解能の比較
(a) COBE, (b) WMAP, (c) Planck 衛星の温度揺らぎの観測. [NASA/WMAP Science Team]

星 WMAP やヨーロッパ宇宙機構（ESO）が打ち上げた Planck 衛星によってさらに精度のよい温度揺らぎの観測がなされ，空間が平坦であることや宇宙年齢，宇宙における種々のエネルギー密度の割合など宇宙論に関する様々な情報が得られた（図 1.12）が，このことについては後の章で詳しく説明する．

1.4 宇宙初期の元素合成

夜空に輝く多くの恒星は，その中心部で陽子同士の核融合によってエネルギーを放出している．この核融合反応ではヘリウム原子核がつくられるので宇宙にヘリウムが存在しておかしくないが，問題はその量である．観測されたヘリウム量は重量で 25%程度にもなるが，星の中でつくられるには多すぎるのである．太陽を典型的な恒星として，宇宙のはじまりから現在までに，どのくらいヘリウムがつくられるかを評価してみよう．L を太陽が 1 秒間に放射するエネルギー，M をその質量とする．核融合反応の質量エネルギー Mc^2 に対するエネルギー生成率を ϵ とすると，太陽が宇宙の歴史の間につくるヘリウムは，核融合の生成物がすべてヘリウムとして次のように評価される．

$$\frac{LH_0^{-1}}{\epsilon Mc^2} \simeq 0.1h^{-1} \tag{1.43}$$

ここで太陽の場合の数値 $L \simeq 4 \times 10^{33}\,\mathrm{erg\ s^{-1}}$, $Mc^2 \simeq 1.8 \times 10^{54}\,\mathrm{erg}$ を代入した．また $\epsilon \simeq 0.01$ である．恒星の光度，寿命などを考慮してもう少し正確に計算すると，この値はもう 1 桁小さくなって $0.01h^{-1} \simeq 0.014$ となる．実際には星の中でつくられたヘリウムはさらに核融合反応を起こし，より重たい原子核になるので，つくられるヘリウム量は上の値よりもさらに小さな値になり，観測されているヘリウム量は説明できない．

この問題を解決すると同時に宇宙に存在するあらゆる元素を宇宙初期の超高温，超高密度状態の核反応によってつくるという試みが，1940 年代にガモフ（G. Gamov）が提案したビッグバン理論であった．ガモフは宇宙のはじめに中性子からなるイーレムと彼が呼んだ始原物質があり，それがベータ崩壊で陽子に崩壊し，その陽子と中性子が超高温，超高密度状態で次々に融合してどんどん重たい原子核をつくると想定したのである．

1950 年，林忠四朗は超高温，超高密度状態では陽子と中性子は次の弱い相互作用を通して平衡状態にあり，ガモフの想定した中性子物質は単独では存在できないことを示した．

$$\mathrm{n} + \mathrm{e}^+ \leftrightarrow \mathrm{p} + \bar{\nu}_\mathrm{e}$$
$$\mathrm{n} + \nu_\mathrm{e} \leftrightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^-$$

$$\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e} \tag{1.44}$$

この指摘はまた現在の宇宙にニュートリノが満ちていることも予言している．上の反応で物質と平衡状態にあったニュートリノは放射と同じ温度のフェルミ分布にある．その後の宇宙膨張によって分布関数（フェルミ分布）の形を変えず温度を下げ，現在絶対温度約 1.9 K のフェルミ分布をもったニュートリノとして存在する．これをニュートリノ背景放射という（第 3 章参照）．

一般にどんな反応にもある時間がかかる．その逆数を反応率という．宇宙初期に反応が効率的に起こるには，反応時間以内に宇宙膨張の影響が無視できる必要がある．反応が起こるまでに宇宙膨張によって反応すべき粒子が引き離されては反応が起こらないからである．宇宙膨張の時間スケールは，その時点におけるハッブルパラメータの逆数で与えられる．したがって反応率を Γ とすると，反応が起こる条件は

$$\Gamma > H \tag{1.45}$$

この条件を上の反応に当てはめると，

$$T \geq 0.9 \times 10^9\,\mathrm{K} \tag{1.46}$$

となる．この温度以上では陽子と中性子の数密度は熱平衡条件から決まるボルツマン分布で与えられる．これから陽子と中性子の質量差 $(m_n - m_p)c^2 \simeq 1.3$ MeV に対応する温度（1.5×10^{10} K）以上ではほぼ同数存在する．

宇宙の温度がさらに下がって 10 億度程度（ビッグバン後約 100 秒）になると，中性子と陽子の数の比は 1 対 7 程度となり，融合反応が始まり，ヘリウムがつくられる．その重量比は中性子がすべてヘリウム原子核に取り込まれるとすれば

$$\frac{(n_n/2)(2m_p + 2m_n)}{n_p m_p + n_n m_n} \simeq \frac{2n_n/n_p}{1 + n_n/n_p} \tag{1.47}$$

と評価され，$n_n/n_p \simeq 1/7$ を代入すると，ヘリウムの重量比として 25% という値が得られ，観測とよく一致する結果を与える．

実際には中性子がすべてヘリウム原子核に取り込まれることはなく，ごく少数の重水素，リチウムなどの軽元素を残して核反応は終わる．宇宙膨張によって温度も密度も急激に下がるため，これ以上の核反応は進まない．より重たい元素は後の宇宙で星が生まれ，その中や超新星爆発の際につくられる（図 1.13）．

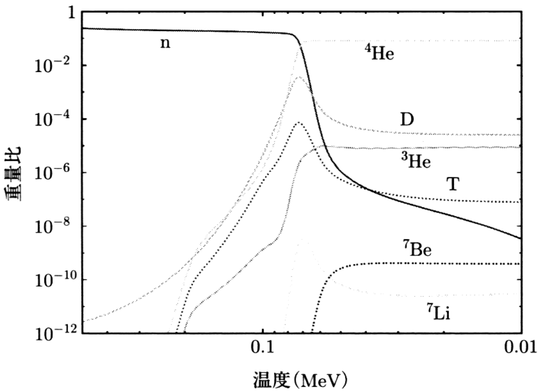
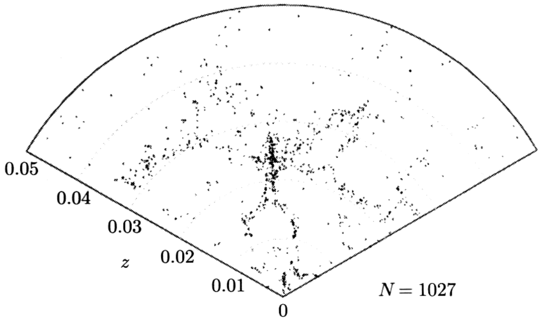


図 1.13 宇宙初期に合成される元素量の時間変化
［川崎雅裕氏（東京大学宇宙線研究所）提供］

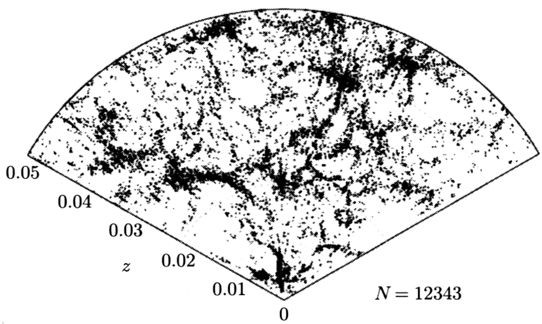
1.5 銀河の3次元分布の観測

宇宙の中で銀河はどのように分布しているのだろうか．すでに1930年代から銀河の集団である銀河団の存在が示唆されていた．しかし銀河の3次元的な分布を知るには，各々の銀河までの距離を知る必要がある．そのためには銀河からの光を分光してスペクトルの輝線を見つけ赤方偏移を測らなければならない．遠方の銀河に対して分光観測は非常に時間がかかってしまう．1980年代にCCDが登場してこの事情が変わった．従来の写真乾板では天体からやってくる光の2%程度しか記録できなかったが，CCDの場合波長によっては80%程度を記録できる．こうして口径は同じでもより遠方の天体を短時間で分光観測できるようになった．

こうして1980年代には，大規模な銀河の赤方偏移サーベイを行うことが可能になった．1981年，アメリカの天文学者カーシュナー達は北天と南天のいくつかの方向でペンシルビームサーベイと呼ばれる狭いが深い（赤方偏移0.1程度）赤方偏移サーベイを行い，うしかい座方向で赤方偏移が0.04から0.06の間，実スケールにして約86 Mpcもの巨大な領域に銀河がほとんど存在しないことを見つけ，ボイドと呼んだ．この発見に刺激されて翌年にはより浅い（赤方偏移0.03程度）がはるかに広い領域でサーベイが行われ，その結果，銀河の



CfAI サーベイ　1980 年代前半　15.5 等級より明るい銀河



SDSS　1990 年代　19 等級より明るい銀河

図 1.14　CfAI と SDSS を同じ広さの領域で比較
[J. Huchra and M. Geller, The Smithsonian Astrophysical Observatory, 1998 および SDSS]

分布はまるで蜂の巣のようにボイドの周りに銀河が群がっている様子が浮き上がってきた．その後のサーベイで銀河団同士が 100 Mpc スケールに集まりより大きな構造をつくっていることも確認された（図 1.14）．このような領域を超銀河団という．こうして銀河は，銀河団，超銀河団と階層構造をつくって分布していることが明らかになった．ではこの階層構造はどこまで広がっているのだろうか，超銀河団よりも大きな構造は存在するのだろうか，という当然の疑問がわく．それに答えるべく大規模な銀河赤方偏移サーベイが行われたが決定版は 1990 年から当初日米が共同で始めたスローン・デジタル・スカイ・サーベイ（Sloan digital sky survey：SDSS）である．これは全天の 4 分の 1 の領



図 1.15 SDSS による約 $500h^{-1}$ Mpc までの銀河分布
SDSS は北半球を主に全天の約 4 分の 1 の領域を 22 等級より明るい 3 億 6000 万の天体の位置と明るさをを測定し，約 18 等よりも明るい天体のスペクトルが得られた．その中には 93 万個以上の銀河と 12 万個以上のクェーサーがあり，宇宙論，銀河天文学の基礎的なデータベースとなり多大の貢献をした．[M. Blanton and SDSS]

域を赤方偏移 0.15 の深さまで 22 等よりも明るい天体をすべて網羅するサーベイで，約 100 万個の銀河と 12 万個のクェーサーが観測された（図 1.15）．その結果，やはり階層構造は約 100 Mpc で終わり，100 Mpc で平均すると銀河分布はほぼ一様であることが分かった．これは CMB の等方性とともに宇宙は一様・等方であるという宇宙原理の観測的な証明とみなすことができる．

一様・等方な空間とは，空間のどの場所もどちらの方向もまったく同等であり，そのような空間を定曲率空間という．空間のどこでも曲がり方（曲率）は同じという意味である．3 次元の定曲率空間は，曲率の正負によって閉じた空間，開いた空間，そして曲率がゼロの平坦な空間に分類される．曲率の値を決めているのは，宇宙に含まれるエネルギー密度の総量である．総エネルギー密度が臨界密度に等しいとき曲率はゼロとなり，それ以上だと正，それ以下だと負となる．CMB の観測から空間の曲率は観測誤差の範囲でゼロである．この本では主に平坦な空間をもった宇宙，平坦な宇宙を考える．宇宙に含まれるのは速

度が光速度に比べて十分小さい非相対論的物質（暗黒物質とバリオン物質），静止質量がゼロ，または運動エネルギーに比べ無視できる相対論的物質（放射），そして後で述べる暗黒エネルギーである．したがって平坦な宇宙では，これら 3 種類のエネルギー密度の総和が臨界密度となる．あるいはそれぞれの密度パラメータの和が 1 となる．

$$\Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\mathrm{DE},0} = 1 \tag{1.48}$$

ここで添え字 m, r, DE はそれぞれ非相対論的物質，相対論的物質，暗黒エネルギーを表す．相対論的物質としては CMB 光子のほかにもニュートリノがある．CMB の温度揺らぎなどの観測から，現在のそれぞれの値は以下のような値である．

$$\Omega_{m,0} \simeq 0.32,\ \Omega_{r,0} \simeq 10^{-5},\ \Omega_{\mathrm{DE},0} \simeq 0.68 \tag{1.49}$$

1.5.1 構造の定量化とパワースペクトル

銀河分布の観測は，数値シミュレーションなどの理論的な予想と比べることによって宇宙モデルや暗黒物質の情報を得ることができる．しかし分布の形が目で見て似ているということでは定量的な議論ができない．また現在観測されている銀河分布はもちろん物理法則にのっとって実現されているが，宇宙を何個も用意して初期条件を誤差の範囲で同じにして銀河分布を時間進化させると，見かけ上は違った分布が得られる．銀河分布としての物理法則の実現の仕方は千差万別であって，大事なのは個々の分布の仕方ではなく，分布の統計的な性質である．したがって銀河分布の統計的な性質を定量的に記述する必要がある．

この定量化に利用される 1 つの方法が相関関数と呼ばれる量である．相関関数には 2 点間，3 点間，4 点間と無限の種類があり，各々有用な統計情報を与えるが，ここでは 2 点相関関数について述べる．なお銀河分布に初めて相関関数を利用したのは木原太郎と東辻浩夫で，1969 年のことである．

銀河の平均数密度を $\bar{n}_g$ として

$$P_1 \equiv \bar{n}_g dV \ll 1 \tag{1.50}$$

となるような十分小さな体積 dV を考える．この領域から距離 r 離れた空間領域 dV の中にほかの銀河が存在する確率を次のように書く．

$$P_2 = \bar{n}_g^2 \left[1 + \xi_g(r)\right] dV^2 \tag{1.51}$$

このとき $\xi_g(r)$ を（銀河）2 点相関関数という．もし銀河が空間に一様に分布していれば当然 $\xi_g = 0$ となる．銀河が群がる傾向がある場合には $\xi_g(r) > 0$ で r の減少関数となる．実際に銀河サーベイの観測から $2h^{-1}\,\mathrm{Mpc} \le r \le 30h^{-1}\,\mathrm{Mpc}$ の範囲で

$$\xi_g(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma},\ r_0 \simeq 5h^{-1}\,\mathrm{Mpc},\ \gamma \simeq 1.8 \tag{1.52}$$

という結果が得られている．また $30h^{-1}\,\mathrm{Mpc}$ 以上では 0 の周りに振動する振舞いを示し，銀河はほぼ一様に分布していることを示している．

位置 $\vec{x}$ での銀河の数密度を

$$n_g(\vec{x}) = \bar{n}_g + \delta n_g(\bar{x}) \tag{1.53}$$

と書くと 2 点相関関数は次のようにも書くこともできる．

$$\bar{n}_g^2\, \xi_g(r) = \langle \delta n_g(\bar{x}_1) \delta n_g(\bar{x}_2) \rangle,\ r = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| \tag{1.54}$$

ここで $\langle \ldots \rangle$ は統計平均である．また 2 点相関関数が 2 点間の距離にしか依存しないのは，銀河分布が統計的に一様であるからである．

この 2 点相関関数のフーリエ変換をパワースペクトルという．

$$P_g(k) = \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \xi_g(r) d^3x = 4\pi \int_0^\infty r^2 \xi_g(r) \frac{\sin kr}{kr} dr \tag{1.55}$$

質量の大半は暗黒物質が占めているので，銀河分布のパワースペクトルは，直接宇宙の質量分布を示すものではない．銀河分布の観測から質量分布を推定するためには，銀河の数密度と暗黒物質の質量密度の関係を知らなければならない．この関係を求めることはバイアス問題と呼ばれ，銀河形成の詳細の物理に関係しており，まだ解明されていない問題である．

暗黒物質の密度揺らぎ δ_{DM} の 2 点相関関数を，

$$\langle \delta_{\mathrm{DM}}(\vec{x}) \delta_{\mathrm{DM}}(\vec{y}) \rangle = \xi_M(r),\ r = |\vec{x} - \vec{y}| \tag{1.56}$$

と定義すると，密度は $\rho_{\mathrm{DM}} = \bar{\rho}_{\mathrm{DM}}(1 + \delta_{DM})$ だから体積 V，半径 R 以内の球状領域以内に含まれる質量は次のように書ける．

$$M = \int_V \rho_{\mathrm{DM}}(\vec{x}) d^3x = \int_V \bar{\rho}_{\mathrm{DM}}(1 + \delta_{\mathrm{DM}}(\vec{x})) d^3x = \bar{M} + \delta M \tag{1.57}$$

ここで $\bar{M}$ は平均質量 $\bar{M} = \bar{\rho}_{\rm DM} V$ である．したがって質量の揺らぎは次のように書くことができる．

$$\frac{\delta M}{\bar{M}} = \frac{1}{V}\int_V \delta(\vec{x}) d^3x \tag{1.58}$$

質量揺らぎの分散は

$$\left\langle \left(\frac{\delta M}{\bar{M}}\right)^2 \right\rangle_R = \frac{1}{V^2}\int_V d^3x \int_V d^3y \langle \delta_{\rm DM}(\vec{x})\delta_{\rm DM}(\vec{y})\rangle$$
$$\simeq \int_V P_M(k)\frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \int_0^{1/R} P_M(k)\frac{k^2 dk}{2\pi^2} \tag{1.59}$$

となる．ここで P_M は密度揺らぎのパワースペクトルで $\xi_{\rm DM}$ のフーリエ変換で定義される．ただし指数関数の積分に対して次の近似を用いた．

$$\frac{1}{V}\int_V d^3x e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \simeq \begin{cases} 1 & (k \le R^{-1}) \\ 0 & (k > R^{-1}) \end{cases} \tag{1.60}$$

これは，$k > R^{-1}$ のとき，指数関数は強い振動をするため積分が消え，$k \ll R^{-1}$ のとき指数関数はほぼ 1 になるからである．2 点相関関数は無次元量なのでパワースペクトルは体積の次元をもっている．そこで無次元量として

$$\Delta_M^2(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2}P_M(k) \tag{1.61}$$

も用いられる．この量を使うと質量揺らぎの分散は次のように書ける．

$$\left\langle \left(\frac{\delta M}{\bar{M}}\right)^2 \right\rangle_R \simeq \int_0^{1/R} \Delta_M^2(k) d\ln k \tag{1.62}$$

したがって $\Delta_M^2(k)$ は波数の対数の微小間隔 $d\ln k = dk/k$ あたりの質量揺らぎの寄与である．

実際に宇宙の大規模構造の観測からパワースペクトルを導くには，ある範囲で平均化された密度場の分布を取り扱う．それには考えているスケール R 以内でのみ値をもち，それ以外では 0 となるような窓関数 W を用いて平均化された密度場を定義する．

$$\delta_R(\vec{x}) = \int \delta(\vec{x}')W(\vec{x}-\vec{x}')d^3x' \tag{1.63}$$

窓関数として，たとえば半径 R 以内で 1，それ以外では 0 をとれば（このよう

な窓関数をトップハット型という),

$$W(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi^2}\frac{j_1(kR)}{kR} \tag{1.64}$$

となる．ここで $j_1(x) = (\sin x - x\cos x)/x^2$ は 1 次のベッセル関数である．

揺らぎの大きさの目安は，この二乗平均，すなわち分散で測られる．

$$\begin{aligned}\sigma^2(R) &= \frac{1}{V^2}\int_V d^3x \int_V d^3y W(\vec{x})W(\vec{y})\xi(|\vec{x}-\vec{y}|)\\ &= \int P(k)|W(\vec{k})|^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\end{aligned} \tag{1.65}$$

この量は半径 R 以内に含まれる質量の関数として $\sigma(M)$ と表されることもある．トップハット型窓関数を用いると，

$$\sigma^2(M) = \int_0^\infty \Delta_M^2(k)\left[\frac{2j_1(kR)}{kR}\right]^2\frac{dk}{k} \tag{1.66}$$

現在のパワースペクトルの規格化として $8\,h^{-1}$ Mpc で平均化された密度場の分散 $\sigma_8 \equiv \sigma(R = 8h^{-1}\,\mathrm{Mpc})$ が用いられ，最近の宇宙マイクロ波背景放射の観測（Planck 衛星）では以下の値が得られている．

$$\sigma_8 \simeq 0.83 \tag{1.67}$$

$8\,h^{-1}$ Mpc $\simeq 12$ Mpc というのは大体銀河団より少し小さい程度のスケールである．この程度のスケールで平均化した密度揺らぎの振幅が 0.83 程度ということである．

密度揺らぎがガウス分布とすれば，この分散を用いてある半径 R 内（質量 M）の密度揺らぎの確率関数，すなわち異なった空間領域における半径 R（質量 M）の密度揺らぎが δ_R から $\delta_R + d\delta_R$ までの値をとる確率が次のように与えられる．

$$P(\delta_R)d\delta_R = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(R)}}\exp\left(-\frac{\delta_R^2}{2\sigma^2(R)}\right)d\delta_R \tag{1.68}$$

この確率関数を用いると，たとえば暗黒物質ハローの質量関数（質量 M から $M + dM$ の間の暗黒ハローの数密度）が得られる（第 4 章参照）．

上に述べたように銀河分布の観測から質量密度の分布を得るにはバイアス問題を解決しなければならないが，銀河は暗黒物質のハローの中で形成されると

考えられており，一般的には暗黒物質の密度が高いところに多くの銀河ができる．とくに暗黒物質密度揺らぎが高いところは効率的に銀河がつくられるが，それ以外の領域では次のような線形関係が仮定される．

$$n_g(\vec{x}, z) = b(\vec{x}, z)\rho_{\rm DM}(\vec{x}, z) \tag{1.69}$$

b はバイアス関数と呼ばれ，一般に赤方偏移 z の関数である．

パワースペクトルの形は，暗黒物質の性質，宇宙の膨張によって変化し，構造形成の詳細な情報を含んでいる．すでに述べたように暗黒物質が HDM の場合，DM の密度揺らぎは DM 粒子がほぼ光速で運動するため，小さなスケールの密度揺らぎは消されてしまう．このスケールは波数で 0.1 程度で，パワースペクトルはこの波数以上の波数領域では急激に減衰することになる．観測されたパワースペクトルには，このような減衰はなく，暗黒物質が CDM であると仮定した場合の理論予想とよく一致している（図 1.16）．このことから暗黒物質の主要な成分は CDM であると考えられている．このようにニュートリノの存

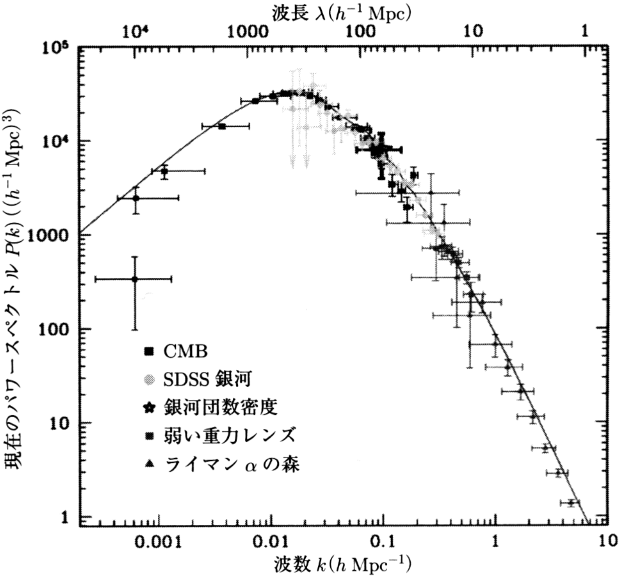


図 1.16 種々の観測から導かれたパワースペクトル

[M. Tegmark, "Cosmological Neutrino Bounds for Non–Cosmologists", *Physica Scripta*, T121, 153, 2005]

在はパワースペクトルの形を変えるため，パワースペクトルの観測から，ニュートリノの質量に制限をつけることができる．以下に述べる SDSS の観測では，すべての種類のニュートリノの質量の和が，0.8 eV 以下という制限がつけられている．

1.5.2 バリオン音響振動

パワースペクトル，あるいは銀河の 2 点相関関数の観測から得られる情報についてもう 1 つ紹介しておこう．観測されたパワースペクトルを詳細に見ると波数が $0.2h^{-1}$ 前後でスペクトルの形がわずかに波打っている（図 1.17）．これはバリオン音響振動（baryon acoustic oscillation：BAO）と呼ばれる現象である．

晴れ上がり以前の宇宙ではバリオン物質は放射と一体の流体（バリオン・光子流体）となって，すでに存在していた暗黒物質の密度揺らぎがつくるポテンシャルの中で振動していた．この振動はバリオン・光子流体中を音波として伝播する．宇宙が晴れ上がるとバリオン物質と CMB 光子は分離するが，音波の振動パターンはそのまま残りバリオン物質の密度が高いところが周期的に現れる．バリオン密度が高いところに暗黒物質も引き寄せられる．暗黒物質やバリオン物質の密度が高いところは選択的に銀河が多くつくられるので，この振動パターンが銀河の空間分布に現れる（図 1.18）．

このスケールは音波が宇宙の晴れ上がりまでに進む距離で評価される．光子・バリオン流体の音速は光速度の約 $1/\sqrt{3} \simeq 0.58$ 倍となる．晴れ上がりの時間はビッグバンから約 38 万年だから，この時間までに音速が進む距離は約 22 万光年となる（この距離を半径とする球面を音速地平面という）．宇宙の晴れ上がりから現在まで約 1100 倍に膨張しているので，この距離は現在までに 2 億 4000 万光年に広がっている．より正確に計算すると約 4 億 6000 万光年 $\simeq$ 150 Mpc となる（第 5 章参照）．銀河の空間分布にはこの距離ごとに銀河数のわずかな増加が見られるはずなのである．実際にこの増加が観測されたのは 100 万個にも及ぶ SDSS 銀河サーベイで 2005 年のことである．図 1.17 は SDSS による観測で得られた銀河の 2 点相関関数で，明らかに 150 Mpc 付近に小さなピークが見られる．

BAO の発見は宇宙論にとって非常に重要である．というのは BAO のスケー

(a)

(b)

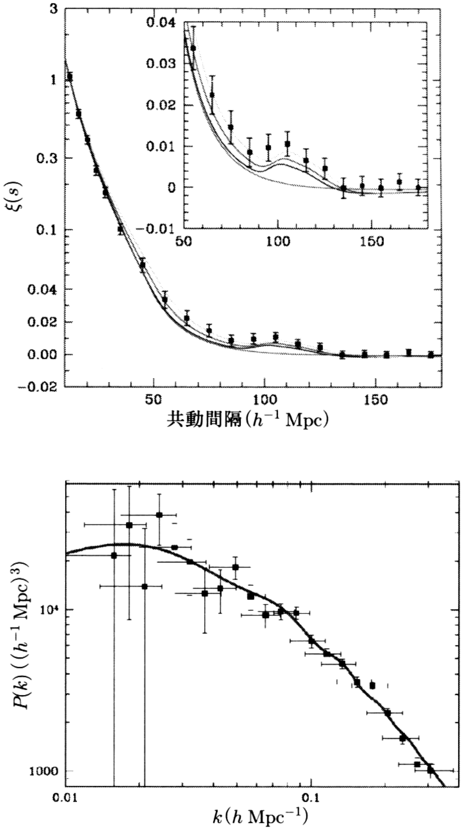


図 1.17　SDSS による BAO の観測

(a) 銀河 2 点相関関数, (b) パワースペクトル．［D. Eisenstein *et al.*, "Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large–Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies", *ApJ.*, **633**, 2, 560, 2005］

ルは初期宇宙の物理過程で決まっていて，どの宇宙モデルにもよらず同じ値を与えるからである（第 2 章で見るように宇宙初期には空間の曲率や暗黒エネルギーの存在は影響しない）．このスケールは天球上である角度スケールで見えるが，この角度は宇宙の大域的な幾何学と膨張則によって決まる．したがって天球上での BAO の角度スケールを観測することにより，これらの情報が得られる．

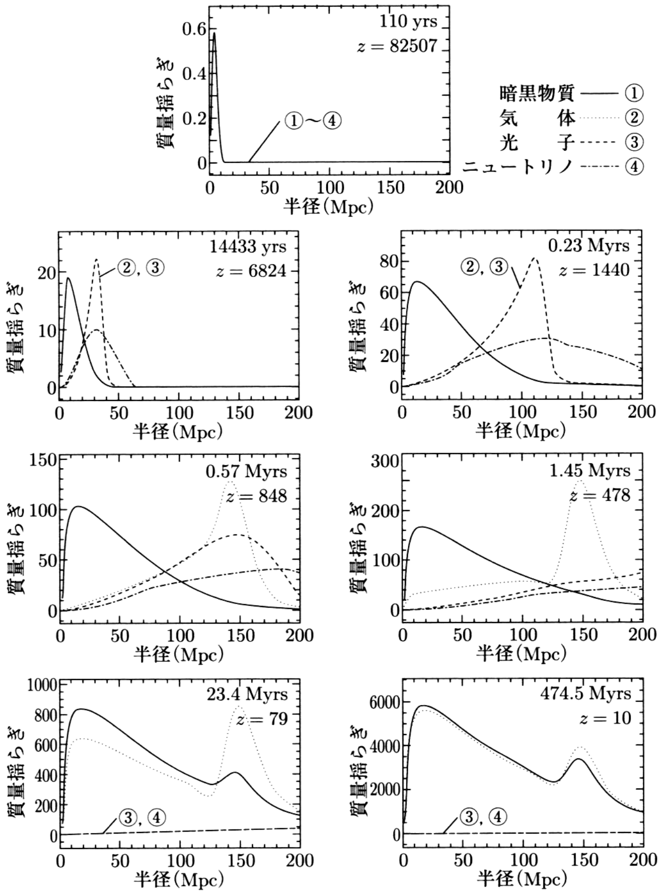


図 1.18 バリオン音響振動のメカニズム

暗黒物質のポテンシャルにより宇宙初期にある位置（この図の原点）に集中した密度の揺らぎがあったとき，それがどのように進化するかを示した図．ただし縦軸は原点からの距離を R，密度揺らぎを δ としたとき，$R^2\delta$ をとっている．宇宙の晴れ上がり以前ではバリオンと光子は一体となって運動しているため，ともに球面波として広がっていく．ニュートリノは相互作用しないのですぐにポテンシャルから抜け出していく．宇宙が晴れ上がってしばらくたつとバリオンの音速は急激に下がり光子とバリオンは独立に運動する．晴れ上がり後，原点付近の CDM の密度が高い領域にバリオン物質がひきつけられ，また原点から約 150 Mpc 離れたところのバリオンの密度揺らぎの大きなところに暗黒物質がひきつけられて物質密度が高くなり銀河ができやすくなる．［D. Eisenstein *et al.*, "On the Robustness of the Acoustic Scale in the Low–Redshift Clustering of Matter", *ApJ.*, **664**, 660, 2007］

1.5.3 赤方偏移ゆがみと神の指効果

1.1 節で述べたように銀河は一様なハッブル流にのって運動しているだけではなく，近傍の銀河同士の重力によって運動している．したがって実際に観測される赤方偏移は，赤方偏移が十分小さければ次のように書くことができる．

$$cz = H_0 d + V_{//} \tag{1.70}$$

ここで $V_{//}$ は特異速度の視線方向の成分である．したがって観測される赤方偏移から定義される距離 $D_{\rm rss}$ は

$$D_{\rm rss} = \frac{cz}{H_0} + \frac{V_{//}}{H_0} \tag{1.71}$$

となり，赤方偏移の情報から銀河の 3 次元分布を求めると，銀河はこの動径距離を使った空間にプロットされることになる．この空間を赤方偏移空間と呼ぶ．したがって本当の銀河分布と赤方偏移空間での分布は違うことになる．このことが端的に現れる例として「神の指（Finger of God）」効果と呼ばれるものがある．図 1.14 において我々の銀河方向を指さすように伸びた銀河分布がそうである．

これを説明するために実際の空間で銀河が球対称に分布している銀河団を考えよう．銀河団の周辺部にある銀河は様々な運動をしているが，いくつもの銀

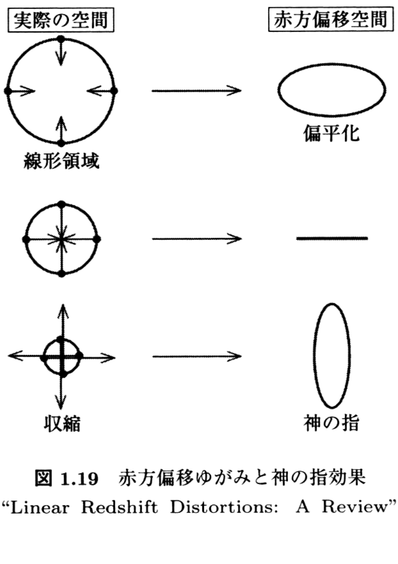


図 1.19 赤方偏移ゆがみと神の指効果

[A.J.S. Hamilton, "Linear Redshift Distortions: A Review", arXiv: astro–ph/9708102, 1997]

河の運動を平均してみると銀河団中心に引き付けられているだろう．したがって我々から見て銀河団中心の手前にある銀河は我々からいくぶん遠ざかっているし，向こう側にある銀河は我々にいくぶん近づいている．そうすると手前にある銀河の観測される赤方偏移はハッブル流だけによるものより大きくなり，逆に向こう側にある銀河の赤方偏移は小さくなる．その結果，赤方偏移空間では手前にある銀河までの距離が本来より大きくなり，向こう側にある銀河までの距離が短くなる．こうして本来球対称に分布していた銀河は，視線方向にいくぶんつぶれた楕円上に分布しているように観測される．これに対して銀河団中心部では重力の影響が強いため，銀河はハッブル流の速度よりも大きな速度で銀河中心方向に運動する．このため手前にある銀河は赤方偏移空間で極端に大きな距離をもち向こう側にある銀河は極端に小さな距離をもつことになる．その結果，銀河分布は逆に視線方向に細く伸びた楕円状になる．こうして銀河が集中している領域の赤方偏移空間での分布は常に我々の方向に向いた細長い形になるのである．

1.6　宇宙の加速膨張の発見

宇宙膨張はよくボールを真上に投げ上げる運動にたとえられる．ボールを真上に投げ上げるとだんだん速度が遅くなってある高さで一瞬静止し，そして落ちてくる．それは地球の重力によってボールが引き付けられているからである．ある速度以上（脱出速度．地球の場合秒速約 11 km）で投げ上げると地球重力を振りきって宇宙に飛び出していくが，速度はだんだん遅くなっていく．宇宙膨張も宇宙の中に含まれる物質の重力によって膨張速度がだんだん遅くなっていく減速膨張である，と信じられていた．ところが 1980 年代にこの考えにほころびが見え始めた．

1980 年代，宇宙の年齢に関する問題が盛んに議論されるようになった．当時，宇宙定数の存在を信じる研究者は少数で，宇宙年齢は 100 億年程度と考えられていた．宇宙定数があると宇宙はある時点から膨張速度が時間とともに速くなる加速膨張を行う（図 1.20）．これによってビッグバンから現在までの年齢を伸ばすことができる．そもそも宇宙定数とはアインシュタインが宇宙を静止させるために重力とは逆に反発力として導入したものであるが，ハッブルに

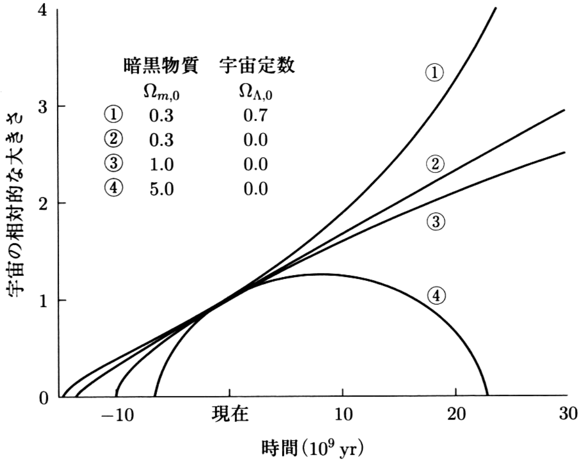


図 1.20 宇宙膨張の様子と宇宙定数

よって宇宙膨張が発見されて以来，その存在はあまり真剣に受け取られていなかった．その理由は，反発力を与える物理的な起源が不明なことにあった．その一方で観測されていた天体の中にその年齢が 100 億年を大きく超えると考えられるものが見つかっていた．たとえば球状星団の中には，星の進化の理論からその年齢が 130 億年前後と評価されるものもあったのである．これは明らかに矛盾であるが，天文学における年齢の推定は誤差が大きく，またハッブルパラメータの値ももっと小さいと考える研究者もいて，はっきりしたことはいえない状況であった．しかし 1990 年代に入るとハッブル宇宙望遠鏡の登場でハッブルパラメータの値が正確に決められるようになり，宇宙定数がなく平坦な宇宙モデル（アインシュタイン–ド・ジッター（Einstein–de Sitter）宇宙）の年齢が 100 億年程度と確定したことで宇宙定数の存在が真実味をもって議論されるようになったのである．

宇宙定数の存在を確認するための実際的な方法は，1990 年代から重力レンズを利用する方法などいくつか提案され実行された．その 1 つが多数のタイプ Ia 型超新星の光度–距離関係を調べることである．タイプ Ia 型超新星は白色矮星の爆発現象で絶対的な明るさが正確に評価される．白色矮星は電子の縮退圧で支えられている星で，太陽程度の質量に対して大きさは地球程度しかない．縮

退圧で支えられている星（白色矮星や中性子星）はその質量がある限界を超えると縮退している粒子（白色矮星なら電子，中性子星なら中性子）が相対論的になり，状態方程式が変化して支えられる質量に上限がでてしまう．この質量をチャンドラセカール質量といい，回転していない場合は太陽質量の約 1.44 倍である．白色矮星が連星系にあると相棒の星の表面物質を剥ぎ取り，それが白色矮星の表面に膠着することで質量が増え，チャンドラセカール質量を超える．このとき白色矮星の中心核が炭素，あるいは酸素の原子核の場合，暴走的な核反応が起こり星全体を吹き飛ばしてしまう．これがタイプ Ia 型超新星と考えられている．このように爆発のメカニズムが分かっているので，絶対的な明るさが推定でき，見かけの明るさ m から以下の関係で距離が分かるのである．

$$m(z) - M = 5\log\left(\frac{d(z)}{10\ \mathrm{pc}}\right) \tag{1.72}$$

M は絶対等級で，この式は絶対等級の定義である．したがっていろいろな赤方偏移 z で超新星を観測すると，距離（正確には光度距離）が赤方偏移 z の関数として分かることになる．一方，距離は宇宙論パラメータにも依存する．宇宙定数が存在する場合，光度距離は宇宙定数が存在しない場合に比べて同じ赤方偏移でも大きくなる．したがってより暗く観測される．こうして多くの違った赤方偏移をもった超新星を観測することで宇宙定数のあるなしが分かるのである．実際には Ia 型超新星の絶対等級の不定性や赤方偏移依存性が完全に理解されているわけではなく，また星間物質による吸収の効果などによって減光されたりするので誤差が付きまとう．これらの系統誤差は，数多くの超新星を観測することで絶対等級の経験的な補正を確立したり，星間吸収のモデルを考慮したりするなどで対応する．たとえば超新星の絶対的な明るさには 50%程度，等級にすると 0.5 等程度のばらつきがあり，そのままでは標準光源として使い物にならない．しかし多くの観測から最大の明るさからある明るさまで暗くなる時間（減光時間）が長いほど最大の明るさが明るいことが分かっていて，次のような関係式が使われる．

$$M_B \simeq 0.8\,(\Delta m_{15} - 1.1) - 19.5 \tag{1.73}$$

ここで M_B は B バンドの絶対等級，Δm_{15} は最大の光度になってから 15 日後の見かけの等級の変化である．この関係式を利用することで絶対的な明るさの

不定性を 20%以下に抑えることができる．しかしこの式は経験的に得られたものであり，その理論的な裏付けはないに等しい．したがってこの関係式から導かれた結論もそのことを十分認識して受け取る必要がある．

図 1.21 左は実際の観測例である．現在では宇宙定数とは宇宙の加速膨張を引き起こす原因の 1 つのモデルにすぎず，より一般的な原因として暗黒エネルギーという概念が考えられている．CMB などの観測から暗黒エネルギーは宇宙全体のほぼ 68%を占めている．このことからもし加速膨張の原因が宇宙定数の場合，第 2 章で示すように赤方偏移 0.63，ビッグバンから約 77 億年後から宇宙は加速膨張を始めたことを意味する．

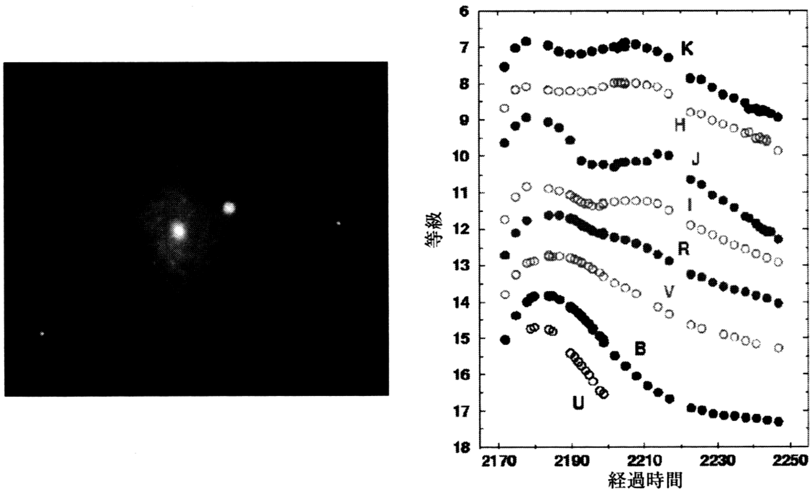


図 1.21　タイプ Ia 型超新星と光度曲線

左は，1998 年 4 月 13 日，20.5 Mpc（67 億光年）かなたの銀河 NGC3982 に現れたタイプ Ia 型超新星．右は，Ia 型超新星 SN2001el の光度曲線．縦軸は様々なバンドでの光度，横軸は日数を表す．[Krisciunas *et al.*, “Optical and Infrared Photometry of the Nearby Type Ia Supernova 2001el”, *A.J.*, **125**, 1, 166, 2003]

本書では触れないが，重力の理論を一般相対性理論ではなく，違った重力理論を採用することで加速膨張を説明する可能性もある．したがってこの観測は加速膨張の原因を決めるのではなく，加速膨張そのものの証拠とみなされている（図 1.22）．この観測を行った 2 つのグループの代表者に，2011 年度のノー

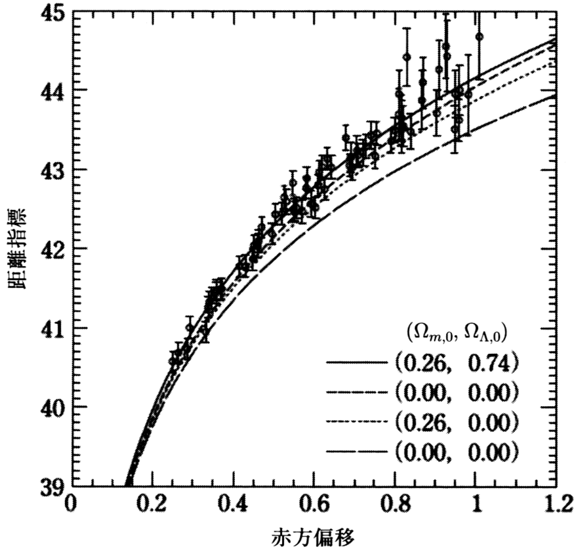


図 1.22　タイプ Ia 型超新星のハッブル図 (明るさと赤方偏移の関係) と色々な宇宙モデルでの理論曲線

丸印に付いている縦線は観測誤差を表す. ［P. Astier *et al.*, "The Supernova Legacy Survey: Measurement of Ω_M, Ω_Λ and w from the First Year Data Set", *Astronomy and Astrophysics*, **447**, 1, 31, 2006］

ベル物理学賞が与えられた.

1.7　観測とその帰結のまとめ

以上, 宇宙論に関する重要な観測をあげてきた. ここで箇条書きでまとめておこう.

1. 宇宙は現在 68 km s^{-1} Mpc^{-1} 程度の速度で膨張している.
2. 宇宙は絶対温度 2.725 K のプランク分布をもった放射で満ちている. またこの放射には 10 万分の 1 程度の温度揺らぎがある.
3. 銀河や銀河団は暗黒物質ハローに取り囲まれ, 暗黒物質は宇宙全体ではバリオン物質よりも数倍多い.
4. 宇宙におけるヘリウムの観測量は, 星の中の核反応で生成される量より

もはるかに多い．

5. 宇宙は 100 Mpc 以上のスケールでは一様・等方であるが，それ以下のスケールでは銀河，銀河群，銀河団，超銀河団という階層構造をしている．
6. 現在の宇宙は加速膨張をしている．

これらの観測結果を正しく解釈するには一般相対性理論，素粒子物理学，原子核物理学，統計力学，流体力学などの物理学の知識が必要である．次章以下で述べる理論によって，以上の観測事実は次のように解釈されている．

1. 宇宙は約 138 億年前，ビッグバンと呼ばれる超高温，超高密度状態から始まった．
2. ビッグバンから約 48000 年までは放射優勢期で，その後，物質優勢期となり，さらに約 77 億年後から加速膨張期に入った．
3. ビッグバンから 37 万年後，宇宙の温度が約 3000 K のとき宇宙は晴れ上がった．それ以前の宇宙では放射とバリオンは一体となって運動していた．晴れ上がり時に出た放射が現在温度 2.725 K の宇宙マイクロ波背景放射として観測されている．
4. 銀河分布の観測から暗黒物質の主要な成分は冷たい暗黒物質である．
5. 空間の曲率は観測誤差の範囲でゼロ，すなわち平坦であり，すべてのエネルギー密度の総和は臨界密度と等しい．現在の暗黒物質，バリオン物質，暗黒エネルギーの寄与は，それぞれ約 27%，5%，68%である．

2 相対論的宇宙論

現代の宇宙論は相対論的宇宙論と呼ばれるように，宇宙全体の幾何学とその時間変化を正しく扱うには，一般相対性理論が必要である．とはいっても一般相対性理論の詳細を知る必要はなく，必要最小限の知識で十分取り扱うことができる．ここでは一般相対性理論のより詳しい説明は付録にまわし，一様・等方な宇宙論の理解に必要な程度で一般相対性理論を説明した後，宇宙の大域的な幾何学や膨張の様子，宇宙論的観測の基礎的な概念を説明する．

2.1　一様・等方宇宙モデル

アインシュタインは一般相対論をつくり，それを宇宙全体に当てはめた．当時は宇宙膨張は知られておらず，宇宙は無限の過去から無限の未来まで永遠に不変だと考えられていたため，重力に対抗する宇宙定数と呼ばれる反発力を導入して静止宇宙モデルをつくろうとした．一般相対論では時空は近傍の 2 事象間（4 次元時空内の 1 点を事象と呼ぶ）の 4 次元的な距離の 2 乗（線素，あるいは計量ともいう）で表される．たとえば平坦な 4 次元時空（ミンコフスキー時空）は，慣性座標系 (T, X, Y, Z) では，

$$ds^2 = -c^2 dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 \tag{2.1}$$

となる．dT は 2 つの事象の時間の差，同様に dX, dY, dZ は 2 つの事象の空間座標の差である．今後，$c = 1$ という単位系を使うことにする．この線素はどんな座標系を使って計算しても同じ値になるというのが特殊相対論の帰結である．以下，記法を簡単にするため $T = x^0$, $X = x^1$, $Y = x^2$, $Z = x^3$ として座標を (x^μ) とまとめて書く．ここで μ は，0，1，2，3 の値をとる．また空間座標

だけをまとめるときには，(x^i) $(i = 1, 2, 3)$ などと添え字にローマ文字を使う．

重力があり時空が平坦ではなく曲がっているとき，大域的な慣性座標系をとることができず，計量は 10 個の成分をもったメトリックテンソル $g_{\mu\nu}$ と呼ばれる量で次の形に書くことができる．

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2.2}$$

このメトリックテンソルを決めているのがアインシュタイン方程式である．アインシュタイン方程式はメトリックテンソルに対する 2 回の微分方程式で，たとえば物質（エネルギー）の分布や境界条件などを決めて解く．とはいってもこの方程式は 10 個の連立非線形偏微分方程式で，簡単な場合にしか解くことができない．そこでアインシュタインは宇宙は時間的に変わらず，空間は一様・等方と仮定した．この仮定を完全宇宙原理という．時間的に変わらないということからメトリックテンソルは時間によらず，また空間の一様・等方性からメトリックテンソルの独立な成分が 10 個から 1 個に減ってしまう．こうして解くべき方程式は 1 つの常微分方程式になる．

詳しい計算は付録にまとめて，ここでは一様・等方膨張空間の線素が次のように与えられることから話を始める．

$$d\ell^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \tag{2.3}$$

この表現で用いた座標をロバートソン–ウォーカー（Robertson–Walker）座標という．この座標系での動径座標 r は，$r =$ 一定の球面の円周の長さが $2\pi r$，面積が $4\pi r^2$ になるような座標で，円周座標とも呼ばれる．この座標系のほかに次の動径方向の座標も使われる．

$$\chi(r) = \int \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = \begin{cases} \sin^{-1} r & (K = +1) \\ r & (K = 0) \\ \sinh^{-1} r & (K = -1) \end{cases} \tag{2.4}$$

この座標を使うと線素は以下のようになる．

$$d\ell^2 = d\chi^2 + r^2(\chi) \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \tag{2.5}$$

ここで K の意味について説明しておこう．今，赤道面 $\theta = \pi/2$ 上に半径 r の円を考える．この円の円周上の 2 点間の距離は，2 点とも同じ r，同じ $\theta = \pi/2$

をもつから

$$d\ell^2 = r^2 d\phi^2 \tag{2.6}$$

で与えられる．したがって円周の長さは

$$\ell = \int_0^{2\pi} r d\phi = 2\pi r \tag{2.7}$$

となるが，一方，円の中心から動径方向に沿った（$\phi =$ 一定）円周までの固有動径距離は

$$\chi = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \tag{2.8}$$

となって，固有の半径と円周の長さの関係は

$$\ell = 2\pi r = \begin{cases} 2\pi \sin\chi & (K = +1) \\ 2\pi\chi & (K = 0) \\ 2\pi \sinh\chi & (K = -1) \end{cases} \tag{2.9}$$

となる．したがって $K = 0$ のときは平坦な空間での半径と円周の関係と同じになり，この場合，空間は平坦である．一方，$K = +1$ のとき $\sin\chi < \chi$ だから，円の半径が大きくなっても円周は平坦な場合に比べると大きくならない．それどころか $\chi = \pi/2$ を超えると円周の長さは小さくなり，$\chi = \pi$ でゼロになってしまう．これは空間が有限であることを示すので，この場合を閉じた空間という．同様にして $K = -1$ は平坦な場合に比べて半径が大きくなるにつれ，それ以内の空間の面積がより大きくなり χ のとる値にも制限がないので開いた空間と呼ばれる．3 次元空間の曲率スカラーを計算すると

$$R = 6K \tag{2.10}$$

となるから，K の符号は曲率の符号と一致することが分かる（付録参照）．

さて宇宙膨張をしている一様・等方空間の 4 次元線素を求めよう．そのために上の一様・等方空間で用いた空間座標を共動座標系とする．この意味は膨張をしていても空間座標は一定ということである．すなわち銀河はいつも決まった空間座標にあるということだ．ただし銀河同士の距離はお互いに離れているので，固有距離はスケール因子 $a(t)$ に従って増加するとする．また時間座標 t は銀河の世界線に沿った固有時間 τ をとる．固有時間は $d\tau^2 = -ds^2$ として定義されるから

$$dt^2 = -ds^2 = -g_{00}dt^2 \tag{2.11}$$

となり $g_{00} = -1$ が得られる．メトリックの成分のうち残りは g_{0i} 成分であるが，これは時間方向を空間方向に直交するようにとれば，0 とすることができる．実際，$\vec{T}$ を時間方向のベクトル，$\vec{X}$ を空間方向のベクトルとすると，$\vec{T} \cdot \vec{X} = g_{0i}T^0X^i = 0$ となるからである．

以上から一様・等方膨張宇宙を記述する 4 次元計量として次の形が得られる．

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right] \tag{2.12}$$

この計量をロバートソン–ウォーカー（RW）計量と呼び，この計量で表される宇宙をロバートソン–ウォーカー（RW）宇宙と呼ぶ．固有動径距離 χ を用いると

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[d\chi^2 + r^2(\chi)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right] \tag{2.13}$$

と書くこともできる．

2.2　ハッブルの法則と赤方偏移

RW 宇宙で，ハッブルの法則と赤方偏移がどのように導かれるかを見てみよう．今，時刻一定面上に 2 つの銀河 A，B を考える．銀河 A の座標を (t, χ, θ, ϕ)，銀河 B の座標を，$(t, \chi + d\chi, \theta, \phi)$ とする．2 つの銀河は同じ時間，同じ角度座標をもっていることに注意．この 2 つの銀河の固有距離 D は，RW 計量から $D = a(t)d\chi$ と書けるから，時間微分すると

$$V = \dot{D} = \dot{a}d\chi = \frac{\dot{a}}{a}D = HD \tag{2.14}$$

となってお互いの銀河の相対速度が距離に比例することが分かる．したがって RW 宇宙ではハッブルの法則が自然に導かれることが分かる．ここで

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \tag{2.15}$$

はハッブルパラメータである．

次に RW 宇宙で離れた銀河からの光が赤方偏移することを見てみよう．今，銀河 B から 2 つの光のパルスが出て我々の銀河 A に続けて届いたとしよう（図

2.1)．我々の銀河系 A を空間座標の原点にとれば，銀河 B からの光は動径方向に真っすぐ飛んでくることになる．したがって銀河 B から放射された光の経路（世界線）上の任意の事象で角度座標は同じである．今，最初の光パルスが放射された時刻を t_e とし，それを受け取った時刻を t_r とする．すると，光の世界線上の任意の 2 事象間では $ds^2 = 0$ が成り立つから，この光パルスの世界線上で

$$0 = ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\chi^2 \tag{2.16}$$

の関係が導かれる．これから $ad\chi = -dt$（マイナスをつけたのは光の世界線上で時間が進むと我々の銀河系までの距離が減少するからである）となるが，この式を放射時から受け取った時刻まで積分すると

$$\int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} = -\int_r^0 d\chi = \chi(r) \tag{2.17}$$

となる．同様に第 2 のパルスが放射された時刻を $t_e + \delta t_e$，それを受け取った時刻を $t_r + \delta t_r$ とすると

$$\int_{t_e+\delta t_e}^{t_r+\delta t_r} \frac{dt}{a(t)} = -\int_r^0 d\chi = \chi(r) \tag{2.18}$$

となる．上の 2 つの式の右辺は同じであるから

$$\int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e+\delta t_e}^{t_r+\delta t_r} \frac{dt}{a(t)} \tag{2.19}$$

となり，$\delta t_e, \delta t_r$ が微小量であることを考えると

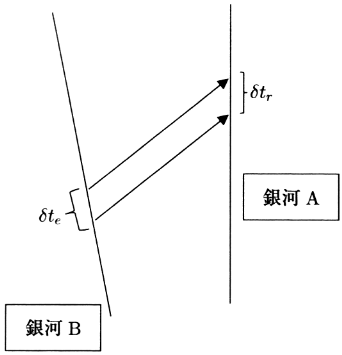


図 2.1　赤方偏移

$$\frac{\delta t_e}{a(t_e)} = \frac{\delta t_r}{a(t_r)} \tag{2.20}$$

が得られる．微小時間間隔を振動数の逆数と思えば

$$\frac{\nu_r}{\nu_e} = \frac{\delta t_e}{\delta t_r} = \frac{a(t_e)}{a(t_r)} \tag{2.21}$$

これから赤方偏移の公式が得られる．

$$1 + z = \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{a(t_r)}{a(t_e)} \tag{2.22}$$

受け取る時刻を現在として現在のスケール因子を 1 とすると，任意の時刻 t にある天体は次の赤方偏移で観測されることが分かる．

$$z = \frac{1}{a(t)} - 1 \tag{2.23}$$

たとえば赤方偏移 1 の天体は，現在の宇宙の半分の大きさの時代の天体ということになる．

2.3 宇宙膨張を決める式とエネルギーの種類

RW 計量で未知の量は曲率とスケール因子である．曲率は宇宙のはじめから決まっていて後で述べる宇宙マイクロ波背景放射の温度揺らぎの観測から平坦，すなわち $K = 0$ であると考えられている．そこで以降，平坦な宇宙に話をかぎることにする．スケール因子は，宇宙の中にどのような形態のエネルギーがどの程度含まれているかが分かれば，アインシュタイン方程式を解くことによって求めることができる．

2.3.1 フリードマン方程式

宇宙膨張の様子はスケール因子の時間発展で決まる．この式はアインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{2.24}$$

から導かれる．ここで $R_{\mu\nu}$ はメトリックの 2 回微分を含みリッチテンソルと呼ばれる 10 成分量で，R はリッチテンソルからつくられるリッチスカラー，Λ は宇宙定数である．宇宙定数を含む項を宇宙項という．右辺の $T_{\mu\nu}$ はストレス・

エネルギーテンソルと呼ばれ，物質や放射を記述する．宇宙論では多くの場合，物質や放射として流体を考えればよく，一様・等方時空では流体のストレス・エネルギーテンソルは次の形に書くことができる．

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} \tag{2.25}$$

この形のストレス・エネルギーテンソルをもつ流体を完全流体という．ここで ρ はエネルギー密度，P は等方圧力である．u は流体素片の 4 元速度である．共動座標系を考えているので流体は座標系上で静止していて 4 元速度は時間成分しかもたない．したがって 4 元速度の規格化条件 $u^2 = g_{\mu\nu} = g_{00}(u^0)^2 = -1$ から

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0) \tag{2.26}$$

となる．したがってストレス・エネルギーテンソルの成分は以下のようになる．

$$T_{00} = \rho,\, T_{0i} = 0,\, T_{ij} = P g_{ij} \tag{2.27}$$

宇宙論の多くの状況では，断熱的，すなわち圧力は密度だけの関数で，しかも単純な比例関係にあるとすれば十分である．

$$P = \omega\rho \tag{2.28}$$

ストレス・エネルギーテンソルは物質や放射だけでなく，宇宙定数も表すことができる．宇宙項をアインシュタイン方程式の右辺にもってくると，

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu}\right) \tag{2.29}$$

と書けるが，この形から

$$T^{\Lambda}_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu} \tag{2.30}$$

として宇宙定数がもつストレス・エネルギーテンソルが定義できる．これは次のエネルギー密度と圧力の関係（状態方程式）をもった完全流体と考えることもできる．

$$P_\Lambda = -\rho_\Lambda,\, \rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \tag{2.31}$$

これから分かるように $\Lambda > 0$ のとき，宇宙定数に対応する流体は負の圧力をもっている．しばしば宇宙定数は空間自体がその属性としてもっているエネル

ギーと解釈され，真空のエネルギーとも呼ばれる．

以下で見るように（正の）宇宙定数は宇宙の加速膨張を引き起こすが，より一般に加速膨張を引き起こすエネルギーを次の状態方程式をもった完全流体として考えることができる．

$$P_{\rm DE} = \omega_{\rm DE}\rho_{\rm DE},\ \omega_{\rm DE} < -1/3 \tag{2.32}$$

$\omega_{\rm DE} < -1/3$ はすぐ下で見るように加速膨張の条件である．係数 $\omega_{\rm DE}$ は一般に時間の関数である．加速膨張を引き起こすエネルギーを総称して暗黒エネルギーという．本書では暗黒エネルギーが宇宙定数の場合のみを考える．また本書では，アインシュタイン方程式に宇宙定数を導入するのではなく，ストレス・エネルギーテンソルの 1 つの成分として宇宙定数を考えることにする．

一様・等方膨張時空のメトリックテンソルからアインシュタイン方程式を具体的に書き下すと，以下のスケール因子に対する 2 階の微分方程式が得られる．

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{2.33}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \tag{2.34}$$

これらの式をフリードマン (Friedmann) 方程式という．第 2 の式から $\rho+3P<0$ の場合，膨張の加速度 $\ddot{a}$ が正になることが分かる．この条件が暗黒エネルギーの満たす条件である．またこの 2 つの方程式からエネルギー密度と圧力に対する以下の方程式が得られる．

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0 \tag{2.35}$$

この式はストレス・エネルギーテンソルに対する保存則からも導かれる．上でも述べたように状態方程式としては簡単な形

$$P = \omega\rho \tag{2.36}$$

を仮定する．以下，状態方程式として考えるのは次の 3 種類である．

1.　**非相対論的物質**（冷たい暗黒物質とバリオン物質）

これは光速度に比べて速度が十分小さく静止質量エネルギーに比べて運動エネルギーが無視できる物質である．この場合，圧力は無視できるので，$\omega = 0$ が十分よい近似である．このとき方程式 (2.35) からエネルギー密度はスケー

ル因子の 3 乗に反比例することが分かる.

$$\rho_m = \frac{\rho_{m,0}}{a^3} \tag{2.37}$$

ここで現在のスケール因子を，1 とおいた．以下，とくに断らないかぎりそうする．また注意すべきことは宇宙の初期の高温度の状況では熱エネルギーが静止質量エネルギーよりも大きくなり，そのため低温で非相対論的物質だったものが宇宙初期では相対論的な物質になることがある．たとえば電子の質量は 0.51 MeV であるが，これは温度にして約 60 億 K に対応する．したがってこれ以上の温度の初期宇宙では電子は相対論的な粒子とみなされる.

2. **相対論的物質**（放射，ニュートリノ）

これは光速度あるいはそれに十分近い速度で運動している粒子で，静止質量エネルギーがゼロか無視できるほど小さい粒子である．このとき統計力学から $\omega = 1/3$ が導かれる．したがって保存則からエネルギー密度がスケール因子の 4 乗に反比例する.

$$\rho_r = \frac{\rho_{r,0}}{a^4} \tag{2.38}$$

3. **宇宙定数**

この場合，$\rho + P = 0$ だから宇宙定数のエネルギー密度はスケール因子に依存しない定数となる.

このように 3 種類のエネルギー密度はそれぞれスケール因子の依存性が異なり，したがって各々が主要になる時期が違ってくる.

2.4 平坦な宇宙における膨張則

それでは各エネルギーが主要な時期ごとの膨張則，スケール因子の時間的な振舞いを見ていこう.

フリードマン方程式を 3 種類のエネルギーを使って書く.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{\rho_{m,0}}{a^3} + \frac{\rho_{r,0}}{a^4} + \rho_\Lambda\right) - \frac{K}{a^2} \tag{2.39}$$

この式の右辺に臨界密度を使うと次のように書ける.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2\left(\frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \Omega_{\Lambda,0} - \frac{K}{a^2 H_0^2}\right) \tag{2.40}$$

ここで宇宙定数に対する密度パラメータを次のように定義した.

$$\Omega_{\Lambda,0} = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{\mathrm{cr},0}} = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \tag{2.41}$$

この式は任意の時刻で成り立つが，とくに現在の時刻 $a = 1$ で両辺を考えると，左辺は H_0^2 となるから，曲率とエネルギー密度の関係が導かれる.

$$\frac{K}{H_0^2} = \Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0} - 1 \tag{2.42}$$

したがって平坦である条件は，密度パラメータの総和が 1，あるいは各種のエネルギー密度の総和が臨界密度になるということである．CMB の観測からこの条件が 100 分の 1 以下の精度で成り立っているので，今後はとくに断らない限り平坦な宇宙で話を進める.

密度パラメータの定義から平坦な宇宙の場合の任意の赤方偏移での密度パラメータは以下のようになることが分かる.

$$\begin{aligned}
\Omega_r(z) &= \frac{\Omega_{r,0}(1+z)^4}{\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0}} \\
\Omega_m(z) &= \frac{\Omega_{m,0}(1+z)^3}{\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0}} \\
\Omega_\Lambda(z) &= \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0}}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

現在の各々の密度パラメータの値に対して，これを示したのが図 2.2 である．これから分かるように赤方偏移が，1 から 1000 程度の範囲では宇宙定数なしの平坦な宇宙モデルが十分よい近似となっている.

問題： 平坦とはかぎらない場合，フリードマン方程式中の曲率項に対応する密度パラメータを

$$\Omega_K(a) \equiv -\frac{K}{H_0^2 a^2} \tag{2.44}$$

と定義する．これを現在の曲率の密度パラメータ $\Omega_{K,0}$ を用いて表せ．この式を使って，$z \to \infty$ の極限で，時空がかぎりなく平坦に近づくことを示せ.

2.4.1 等 密 度 時

宇宙の初期にさかのぼればさかのぼるほどスケール因子は小さくなるので，たとえ現在，放射のエネルギー密度が物質のエネルギー密度に比べて非常に小

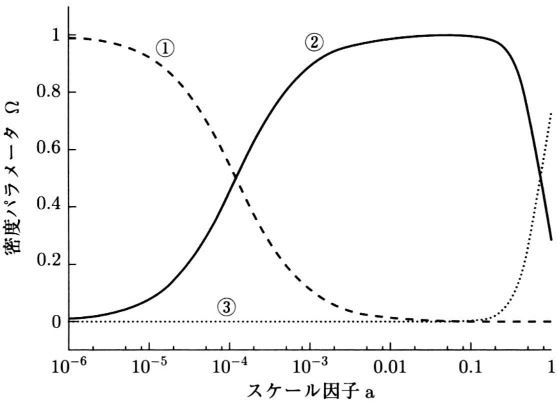


図 2.2 平坦な宇宙における密度パラメータの時間変化
①放射成分，②物質成分，③宇宙定数

さくても，宇宙初期には放射のエネルギー密度の方が大きくなる．放射のエネルギー密度と物質のエネルギー密度が同じになる時刻を，等密度時といい，構造形成にとって重要な時期となる．

この時期は簡単な計算から分かる．まず現在，観測されている CMB の温度は 2.725 K であるので，そのエネルギー密度は

$$\rho_{\mathrm{CMB},0} = \frac{\pi^2}{15} T_{\mathrm{CMB},0}^4 \tag{2.45}$$

と評価される．さらに放射成分として 3 種類のニュートリノの寄与がある．

$$\rho_\nu = 3\frac{7}{8}\left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} \rho_{\mathrm{CMB}} \simeq 0.68\rho_{\mathrm{CMB}} \tag{2.46}$$

ここで 3 は光子に対する 3 種類のニュートリノの自由度，7/8 はフェルミ統計からくる因子，$(4/11)^{1/3}$ は光子とニュートリノ温度の比（第 3 章参照）である．

一方，物質のエネルギー密度は

$$\rho_{m,0} = \Omega_{m,0}\rho_{\mathrm{cr},0} \simeq 1.88 \times 10^{-29} h^2 \mathrm{~g~cm}^{-3} \tag{2.47}$$

したがって，等密度時のスケール因子を a_{eq} と書けば，次式が成り立つ．

$$\frac{\rho_{m,0}}{a_{\mathrm{eq}}^3} = \frac{\rho_{r,0}}{a_{\mathrm{eq}}^4} \tag{2.48}$$

ただし $\rho_r = \rho_{\mathrm{CMB}} + \rho_\nu$ である．これから等密度時の赤方偏移が

$$1 + z_{\rm eq} = \frac{1}{a_{\rm eq}} = \frac{\rho_{m,0}}{\rho_{r,0}} \simeq 2.4 \times 10^4 \left(\Omega_{m,0} h^2\right) \tag{2.49}$$

となる．ここに観測値 $\Omega_{m,0}h^2 \simeq 0.14$ を代入すると，$z_{\rm eq} \simeq 3360$ が得られる．第 5 章で紹介する最近の Planck 衛星の観測では $z_{\rm eq} \simeq 3402$ という値が得られている．ハッブルパラメータの値として Planck 衛星の観測値 $H_0 \simeq 67$ km s^{-1} Mpc^{-1} を採用すると，これはビッグバンから約 5 万 1000 年に対応する．

構造形成で重要になる等密度時のハッブル地平面サイズを導いておこう．この時期では宇宙定数は無視できるのでフリードマン方程式は

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^4}\right) \tag{2.50}$$

となるが，等密度時では $\rho_m = \rho_r$ となるから

$$H_{\rm eq}^2 = \frac{16\pi G}{3} \rho_{m,0} (1 + z_{\rm eq})^3 = 2H_0^2 \Omega_{m,0} a_{\rm eq}^{-3} \tag{2.51}$$

したがって共動ハッブル半径は

$$L_{\rm eq} = \frac{1}{a_{\rm eq} H_{\rm eq}} = \frac{\Omega_{r,0}^{1/2}}{\sqrt{2} H_0 \Omega_{m,0}} \simeq 0.98 \times 10^2 \left(\frac{\Omega_{m,0} h^2}{0.14}\right)^{-1} \ {\rm Mpc} \tag{2.52}$$

対応する波数をこの逆数で定義すれば，

$$k_{\rm eq} \simeq 1.02 \times 10^{-2} \left(\frac{\Omega_{m,0} h^2}{0.14}\right) \ {\rm Mpc}^{-1} \tag{2.53}$$

となる．

2.4.2 放射優勢期から物質優勢期

宇宙定数が優勢になる時期よりも十分以前の宇宙を考えよう．このときフリードマン方程式は (2.50) 式で近似される．$a_{\rm eq} = \Omega_{r,0}/\Omega_{m,0}$ を用いると，これから

$$H_0 dt = \frac{a}{\Omega_{r,0}^{1/2}} \left(1 + \frac{a}{a_{\rm eq}}\right)^{-1/2} da \tag{2.54}$$

となり，積分すると

$$H_0 t = \frac{4 a_{\rm eq}^2}{3 \Omega_{r,0}^{1/2}} \left[1 - \left(1 - \frac{a}{2a_{\rm eq}}\right)\left(1 + \frac{a}{a_{\rm eq}}\right)^{1/2}\right] \tag{2.55}$$

この式は宇宙定数が優勢になる十分に以前の放射優勢期から物質優勢期までの膨張則を与える．

もう少し見やすくするために，等密度時よりも十分以前の極限 $a \ll a_{\rm eq}$ をとってみよう．

$$a(t) \simeq \sqrt{2\Omega_{r,0}^{1/2} H_0} t^{1/2} \tag{2.56}$$

これが放射優勢時の膨張則である．一方，逆に等密度時よりも十分後の極限 $a \gg a_{\rm eq}$ をとると

$$a(t) \simeq \left(\frac{3}{2}\Omega_{m,0}^{1/2} H_0\right)^{2/3} t^{2/3} \tag{2.57}$$

これが物質優勢期の膨張則となる．膨張則は放射優勢時の $t^{1/2}$ から物質優勢時の $t^{2/3}$ に変わっていく．

等密度時の時刻は上の式で $a = a_{\rm eq}$ を代入すると，

$$t_{\rm eq} = \frac{4}{3H_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{a_{\rm eq}^2}{\Omega_{r,0}^{1/2}} \simeq 0.39 \frac{1}{H_0}\frac{\Omega_{r,0}^{3/2}}{\Omega_{m,0}^2} \tag{2.58}$$

ここで $\Omega_{r,0}$, $\Omega_{m,0}$ に対する観測値を代入すると

$$t_{\rm eq} \simeq 3.4 \times 10^{-6} H_0^{-1} \simeq 51000 \text{ yr} \tag{2.59}$$

となる．

2.4.3 物質優勢期から宇宙定数優勢期

次に物質優勢時から宇宙定数優勢時の膨張則を考えよう．

フリードマン方程式の右辺で物質のエネルギー密度と宇宙定数のエネルギー密度が等しい条件は

$$1 + z_\Lambda = \frac{1}{a_\Lambda} = \left(\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}}\right)^{1/3} \simeq 1.29 \tag{2.60}$$

となる．したがって $z_\Lambda \simeq 0.29$ となり，これはビッグバンから約 103 億年後に相当する．実際に加速膨張をしだすのは，$\ddot{a} > 0$ の条件から

$$\rho + 3P = \rho_M + \rho_\Lambda + 3P_\Lambda = \rho_M - 2\rho_\Lambda < 0 \tag{2.61}$$

これから加速膨張を始めたときのスケール因子を a_A，対応する赤方偏移を z_A

と書くと

$$1 + z_A = \frac{1}{a_A} = \left(\frac{2\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}}\right)^{1/3} \simeq 1.63 \tag{2.62}$$

したがって $z_A \simeq 0.63$ でビッグバン後約 77 億年となり宇宙定数優勢になる前のことである．

等密度時から十分たった宇宙では，放射密度が無視できるのでフリードマン方程式は次のように書ける．

$$\dot{a}^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_{\Lambda,0} a^2\right) \tag{2.63}$$

この式を解くために次の変数を導入する．

$$u = \frac{2\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}} a^3 \tag{2.64}$$

すると変数 u についての式は次のようになる．

$$\dot{u}^2 = 9H_0^2 \Omega_{\Lambda,0}(2u + u^2) \tag{2.65}$$

この式はすぐに積分できて

$$3H_0 \Omega_{\Lambda,0}^{1/2} t = \int_0^u \frac{du}{(2u + u^2)^{1/2}} = \cosh^{-1}(u+1) \tag{2.66}$$

ここで $t = 0$ で $u = 0$ として積分定数を決めた．したがって

$$\begin{aligned} a^3 &= \frac{\Omega_{m,0}}{2\Omega_{\Lambda,0}} \left[\cosh\left(3H_0 \Omega_{\Lambda,0}^{1/2} t\right) - 1\right] \\ &= \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \sinh^2\left(\frac{3}{2} H_0 \Omega_{\Lambda,0}^{1/2} t\right) \end{aligned} \tag{2.67}$$

この式は a_Λ を使うと

$$\left(\frac{a}{a_\Lambda}\right)^3 = \sinh^2\left(\frac{3}{2} H_0 \Omega_{\Lambda,0}^{1/2} t\right) \tag{2.68}$$

となるから，これを t について解けば

$$t(a) = \frac{2}{3H_0\sqrt{1 - \Omega_{m,0}}} \ln\left[\left(\frac{a}{a_\Lambda}\right)^{3/2} + \sqrt{1 + \left(\frac{a}{a_\Lambda}\right)^3}\right] \tag{2.69}$$

赤方偏移の関数として表したければ，$1 + z = 1/a$ の関係を代入すればよい．この式で $a/a_\Lambda \ll 1$ という極限をとれば，上で求めた物質優勢時のスケール因子

と時間の関係が再現される．一方，逆の極限 $a/a_\Lambda \gg 1$ では，

$$a(t) = \frac{a_\Lambda}{2^{2/3}} \exp\left(H_0 \Omega_{\Lambda,0}^{1/2} t\right) \tag{2.70}$$

と指数関数的な膨張則が得られる．

また現在の宇宙年齢は上の式で，$a = 1$ として

$$t_0 = \frac{2}{3H_0\sqrt{1-\Omega_{m,0}}} \ln\left[\frac{1+\sqrt{1-\Omega_{m,0}}}{\sqrt{\Omega_{m,0}}}\right] \simeq 13.8 \text{ Gyr} \tag{2.71}$$

となる．

2.4.4 距離と赤方偏移の関係

ここで一様・等方膨張宇宙における観測と深く結びついた距離と赤方偏移の関係を導いておこう．宇宙論において距離は直接観測される量ではない．たとえば遠方銀河からの光を受け取ったとして，我々の銀河系とその銀河までの距離とはいったいなんだろう？　距離が絶対的な意味をもつのは，その両端を同時刻で測った固有距離である．しかし遠方銀河が光を放射したのは何十億年か前の宇宙である．その銀河までの距離とは，光を出した時点と現在の銀河系までの距離だろうか？　あるいは現在でのその銀河までの距離だろうか？　そもそも距離は直接観測されるものではない．直接の観測量は赤方偏移である．

このように宇宙論では距離という概念そのものに不定性があるので，ある約束の下に距離を決めて，その距離と赤方偏移を関係づける．そのように定義された代表的なものに光度距離と角径距離がある．

a. 光 度 距 離

光度距離は，標準光源（絶対的な光度が分かっている天体）がある場合に有用な距離で，第 1 章で述べた超新星観測から宇宙が加速膨張をしていることを示すのに用いられる．今 3 次元のユークリッド空間で，我々（原点）からある距離 D 離れた場所に光度 L の光源があるとする．光度とは単位時間あたりに光源が放射する全エネルギーである．我々が空間座標が光源から受け取る単位時間，単位面積あたりのエネルギーをエネルギー流速といい f で表そう．すると原点に届くまでにエネルギーは半径 D の面積 $4\pi D^2$ に広がるから光度と流速の間には次の関係がある．

$$f = \frac{L}{4\pi D^2} \tag{2.72}$$

この関係をそのまま認めて，これを距離の定義としたものを光度距離 D_L という．

$$D_L = \left(\frac{L}{4\pi f}\right)^{1/2} \tag{2.73}$$

要するに明るさの分かっている天体があるとして，それがどのくらい暗く見えるかを距離の指標にしようということである．

今，我々の銀河系から共動距離 χ にある銀河を考えよう．この銀河が δt_E に放射したエネルギーを δE_E としよう．すると光度は $L_E = \delta E_E/\delta t_E$ と書ける．このエネルギーは我々に届くまでに $4\pi r^2(\chi)$ の球面に広がるから，我々が観測するエネルギー流速は

$$f_O = \frac{\delta E_O/\delta t_O}{4\pi r^2(\chi)} \tag{2.74}$$

ここで宇宙膨張による赤方偏移を思い出すと

$$\frac{\delta E_E}{\delta E_0} = \frac{\delta t_O}{\delta t_E} = \frac{1}{a} = 1 + z \tag{2.75}$$

したがって

$$f_O = \frac{1}{(1+z)^2}\frac{\delta E_E}{4\pi r^2(\chi)\delta t_E} \tag{2.76}$$

となり，光度距離の定義と比較することで

$$D_L(z) = (1+z)r(\chi) \tag{2.77}$$

となることが分かる．後は $r(\chi)$ を赤方偏移の関数として求めればよい．

r と χ の関係は前に示している．$K = 0$ の場合，$r = \chi$ である．次に χ と赤方偏移の関係を求める．これは我々を空間の原点であるとして光源天体まで光の世界線を考えると，$ds^2 = 0$ から

$$dt = -a(t)d\chi \tag{2.78}$$

の関係が導かれる．これから分かるように（光速度をかければ）$d\chi$ は時刻 dt の間に光が進んだ座標距離を表すので，χ は共動距離とも呼ばれる．

$$\chi(z) = -\int_{t_O}^{t_E}\frac{dt}{a(t)} = \int_{t_E}^{t_O}\frac{da}{a^2}\frac{1}{H} = \frac{1}{H_0}\int_0^z\frac{dz}{E(z)} \tag{2.79}$$

ここで $1+z = 1/a$ を使いハッブルパラメータを赤方偏移で表した次式を使った．

$$H = H_0 \left[\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0} \right]^{1/2} = H_0 E(z) \tag{2.80}$$

ここで平坦条件 $K = 0$ を使っている．

たとえば宇宙定数がゼロで平坦な宇宙（アインシュタイン–ド・ジッター宇宙）の場合，$E(z) = (1+z)^{3/2}$ となるから上の積分は容易に実行できて結局

$$D_L(z) = \frac{2}{H_0}(1+z)\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right] \tag{2.81}$$

宇宙定数がある一般の平坦な宇宙では

$$D_L(z) = \frac{1+z}{H_0}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0}}} \tag{2.82}$$

となるが，この式は数値的にしか積分できない．$z \gg 1$ の極限では

$$D_L(z) \simeq \frac{2}{H_0 \Omega_{m,0}^{1/2}}(1+z) \tag{2.83}$$

と評価される．

超新星の見かけの等級と絶対等級の関係式に使われる距離は，この光度距離である．

$$m(z, \Omega_{m,0}) - M = 5 \ln \left(\frac{D_L(z, \Omega_{m,0})}{10\,\mathrm{pc}} \right) \tag{2.84}$$

平坦な宇宙での光度距離は赤方偏移のほかに物質の密度パラメータにも依存するので，その依存性も書いた．この式から絶対等級が分かっていると各赤方偏移での見かけの明るさを観測すると $\Omega_{m,0}$ が分かる．平坦性から $\Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{m,0}$ より，これは宇宙定数の密度パラメータが分かるということである．

b. 角径距離

光度距離のほかによく用いられるのが角径距離である．ユークリッド空間では，ある長さの物体は遠くにあればあるほど小さく見える．これを距離の定義として宇宙にも適用したのが，角径距離である．

今，動径座標 χ に固有の長さ L の棒を考える．この棒を赤道面 $\theta = \pi/2$ に置くと，両端の座標は (t, χ, θ, ϕ) と $(t, \chi, \theta, \phi + \delta\phi)$ と書くことができる．したがってこの棒の固有の長さは

$$L = ds(dt = d\chi = d\theta = 0, \theta = \pi/2) = a(t) r \delta\phi \tag{2.85}$$

となるから

$$D_A(z) = \frac{L}{\delta\phi} = a(t)r(z) \tag{2.86}$$

となる．したがって光度距離とは次の関係になる．

$$D_A(z) = \frac{D_L(z)}{(1+z)^2} \tag{2.87}$$

図 2.3 は，光度距離，共動距離，角径距離を赤方偏移の関数として描いた図である．角径距離はある赤方偏移（アインシュタイン–ド・ジッター宇宙の場合は $z = 1.25$）で最大値となり，それ以遠はだんだん小さくなる．これはある赤方偏移より遠い天体は，遠くに行けばいくほど大きく見えるということである．一見，このことは矛盾に見えるが，実際にそのように見えるため矛盾ではない．ある赤方偏移より遠い天体から出た光が，凸レンズを通ってくるように曲げられるため，このような現象が起こる．図 2.4 は宇宙モデルの違いによる角径距離の変化である．したがって角径距離，あるいは光度距離を様々な赤方偏移で直接測ることができれば，宇宙モデルを決めることができる．タイプ Ia 型超新星の光度・赤方偏移関係がまさにそれである．

この角径距離は，重力レンズや CMB 温度揺らぎから宇宙論的情報を引き出すときに使われる．

問題： アインシュタイン–ド・ジッター宇宙の場合に角径距離が最大になる赤

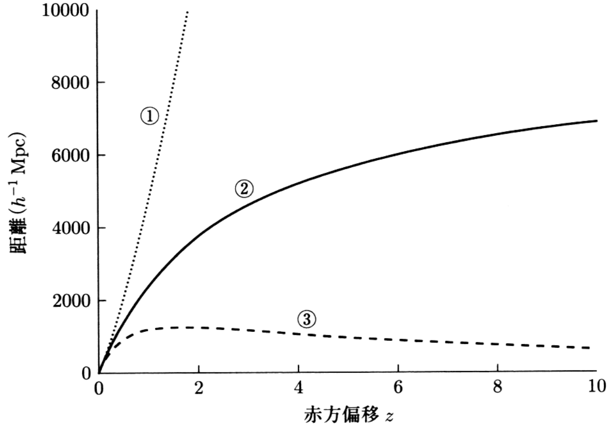


図 2.3 アインシュタイン–ド・ジッター宇宙での①光度距離 d_L，②共動距離 χ，③角径距離 d_A

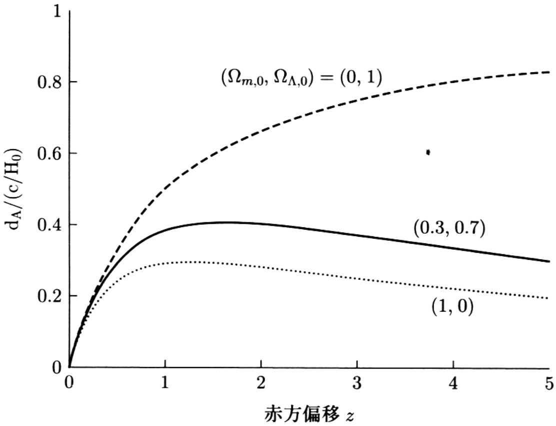


図 2.4 宇宙モデルによる角径距離の違い

方偏移を求めよ.

2.5 ビッグバンモデルの困難

これまで一様・等方膨張宇宙のモデルと膨張の様子を見てきたが，実はこのモデルには大きな問題が内在されている．これを説明するために地平面という概念を導入しよう．

2.5.1 粒子地平面

もしあらゆる観測手段が利用できるとして，現在の私たちは宇宙のどこまで観測することができるのだろう．あるいは現在の宇宙と因果関係をもつ領域の大きさはどこまでだろう．

宇宙にははじまりがあること，そしてどんな情報も光速度以下で伝わることから，因果関係をもち得る領域にはかぎりがある．この領域の境界を地平面，正確には粒子地平面という．現在の粒子地平面，宇宙の晴れ上がり時点での粒子地平面など粒子地平面は，時間の関数である．粒子地平面に対して事象の地平面と呼ばれるものもある．これは無限の未来まで行って観測できるかぎりの領域の境界のことである．ここでは粒子地平面だけに話をかぎる．

粒子地平面の大きさを計算してみよう．そのためにビッグバンの瞬間から現在までに光が進む距離を考える．光の世界線上で $ds^2 = 0$ が成り立つので，動径方向に進む光を考えると

$$d\chi = -\frac{dt}{a(t)} \tag{2.88}$$

だから

$$R_H(t) = a(t)\int_0^{\chi} d\chi = a(t)\int_0^t \frac{dt}{a(t)} \tag{2.89}$$

もしこの右辺の積分が収束するとき，この R_H を粒子地平面半径という．またこの式を $a(t)$ で割ったものを共動粒子地平面半径といい，$\chi_H(t)$ と書こう．

$$\chi_H(z) = \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^t \frac{da}{a^2 H(a)} = \frac{1}{H_0}\int_z^{\infty} \frac{dz}{E(z)} \tag{2.90}$$

アインシュタイン–ド・ジッター宇宙 $(K = \Lambda = 0)$ の場合，$E(z) = (1+z)^{3/2}$ だから

$$\chi_H(z) = \frac{2}{H_0(1+z)^{1/2}} \tag{2.91}$$

宇宙定数がある場合は積分できないが，赤方偏移が大きな極限で次のように近似される．

$$\chi_H(z) \simeq \frac{2}{H_0\Omega_{m,0}^{1/2}}\frac{1}{\sqrt{1+z}} \tag{2.92}$$

この式は $z \simeq 0$ でもそれほど悪い近似ではない．

CMB の温度揺らぎや構造形成などで，特定の赤方偏移での地平面半径が天球上でどの程度の角度スケールで見えるかが重要になる．この角度スケールは，$z \gg 1$ で次のように計算される．

$$\theta(z) = \frac{R_H(z)}{D_A(z)} \simeq \frac{1}{\sqrt{1+z}} \tag{2.93}$$

この式からたとえば宇宙の晴れ上がり時点（$z \simeq 1100$）の地平面半径は約 1.7 度，等密度時（$z \simeq 4000$）での地平面半径は約 0.9 度となる．

2.5.2 ハッブル地平面

ここでもう 1 つよく使われる地平面の定義をあげておこう．それはハッブルパラメータの逆数そのものでハッブル地平面半径，あるいは単にハッブル半径

と呼ばれる．

$$D_{\rm H}(t) \equiv \frac{1}{H(t)} \equiv a(t)d_{\rm H}(t) \tag{2.94}$$

ここで $d_{\rm H}$ は共動ハッブル半径である．ハッブル半径はその時刻での相互作用の伝わる範囲を決めている．宇宙定数や空間曲率が無視できるような宇宙初期ではハッブルパラメータは以下のように近似される．

$$H(z) = H_0\Omega_{r,0}^{1/2}(1+z)^2\left(1+\frac{z_{\rm eq}}{z}\right)^{1/2} \tag{2.95}$$

したがってたとえば等密度時でのハッブル半径は，$1+z_{\rm eq} = \Omega_{m,0}/\Omega_{r,0}$ に注意すれば以下のようになることが分かる．

$$D_{\rm H}(z_{\rm eq}) = \frac{1}{H(z_{\rm eq})} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}H_0}\frac{\Omega_{r,0}^{3/2}}{\Omega_{m,0}^2} \simeq 19\ {\rm kpc} \tag{2.96}$$

$$d_{\rm H}(z_{\rm eq}) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}H_0}\frac{\Omega_{r,0}^{1/2}}{\Omega_{m,0}} \simeq 64.6\ {\rm Mpc} \tag{2.97}$$

ただし $\Omega_{m,0} \simeq 0.32$, $z_{\rm eq} \simeq 3400$ を用いた（ここでは大まかな目安を与えるため Planck 衛星で得られた値の近似値を用いた）．

2.5.3 地平線問題

地平面半径は基本的には，ハッブルパラメータの逆数で有限の値となる．ところがこれが問題なのである．

宇宙の晴れ上がり時点（$z_{LS} \simeq 1100$）での地平面半径は，上で計算したように

$$R_H(z_{LS}) \simeq a(z_{LS})\chi_H(z_N) \simeq \frac{2}{H_0\Omega_{m,0}^{1/2}}\frac{1}{(1+z_{LS})^{3/2}} \tag{2.98}$$

一方，現在の観測可能な宇宙は晴れ上がり時点でどのくらいの大きさだったか計算してみよう．現在の大きさを半径

$$R_H(z=0) \simeq \frac{2}{H_0\Omega_{m,0}^{1/2}} \tag{2.99}$$

の球とすると，この領域は宇宙膨張によって広がってきたから宇宙の晴れ上がりのときの半径は

$$\ell(z_{LS}) = a(z_{LS})R_H(z=0) = \frac{R_H(z=0)}{1+z_{LS}} \tag{2.100}$$

この半径と晴れ上がり時の地平面半径を比べてみると

$$\frac{R_H(z_{LS})}{\ell(z_{LS})} = (1+z_{LS})^{1/2} \simeq 33 \tag{2.101}$$

したがって体積では，この 3 乗の約 36000 個となる．

このことは現在の宇宙は，宇宙の晴れ上がりの時点で約 36000 個の因果関係のない領域からできていたということである．したがって現在の宇宙で一様・等方性が成り立つ理由はどこにも存在しない．たとえばある方向からやってくる CMB 光子と，それと 1.7 度以上離れた方向からやってくる CMB 光子を考えてみよう．この宇宙の晴れ上がりのときこの 2 つの光子が放射された場所はお互いの地平面半径より遠く，宇宙が始まって以来どんな相互作用ももっていない．したがってこの 2 つの場所の温度は何百度違っていてもおかしくない．むしろ違っていた方が自然である．しかし観測では 2 点の温度の差は 10 万分の 1 の精度で一致しているのである．これは全く違った進化をした 2 つの領域が，偶然に 10 万分の 1 の精度で同じ温度になったということである．CMB の等方性は，この 2 つだけではなく 36000 個の領域がすべて偶然に同じ温度になったことを示している．なぜ因果関係をもたなかった領域が同じ温度になったのかビッグバン理論の枠組みの中では全く説明できない．これが地平線問題である．

この計算から分かるように因果関係のない領域は過去に行けばいくほど，どんどん増えていく．その理由は地平面半径が光速度で広がっていくのに対して，宇宙が大きくなる速度は過去に行けばいくほど速くなり（宇宙初期の話なので現在の加速膨張期は除く）地平面が広がるよりも速くなるからである．

2.5.4　平坦性問題

もう 1 つビッグバン理論の問題点をあげておこう．これはなぜ現在の宇宙は，ほぼ平坦なのかという問題である．

フリードマン方程式から

$$\frac{K}{a^2H^2} = \frac{K}{\dot{a}^2} = \Omega_{\rm total} - 1 \tag{2.102}$$

さて物質優勢期以前の宇宙膨張が減速膨張であるので，速度は過去に行けばいくほど速くなる．したがって

$$\Omega_{\rm total} - 1 \propto \frac{1}{\dot{a}^2} \to 0 \quad (t \to 0) \tag{2.103}$$

具体的に評価してみよう．簡単のため物質優勢と考えると

$$\dot{a}^2 = H_0^2 \frac{\Omega_{M0}}{a} \propto \frac{1}{a} \tag{2.104}$$

したがって

$$\Omega_{\rm total} - 1 = (\Omega_{\rm total,0} - 1)\left(\frac{1}{1+z}\right) \tag{2.105}$$

となり，現在の観測から $\Omega_{\rm total,0} - 1 \simeq 10^{-2}$ 程度であるから，宇宙の晴れ上がり時点では

$$\Omega_{\rm total}(z_{LS}) - 1 \simeq 10^{-5} \tag{2.106}$$

すなわち宇宙の晴れ上がりの時点で 10 万分の 1 の精度で平坦でなければ現在の宇宙の平坦性を説明できない．同じような計算をすれば，放射優勢時には

$$\Omega_{\rm total} - 1 \propto a^2 \tag{2.107}$$

となり宇宙初期に行けばいくほど密度パラメータは 1 に近づいていく．たとえば現在の平坦性を説明するには，ビッグバンから約 10 万分の 1 秒後の元素合成時点で密度パラメータは 1000 兆分の 1 の精度で 1 に近くなければならない．

なぜ宇宙はこのような非常に平坦に近い状態から始まったのかというのが平坦性問題である．

地平線問題と平坦性問題の根をよく考えてみると，どちらも宇宙ははじめから減速膨張をしていたという仮定にある．そして宇宙のごく初期に加速膨張が起こったとしてこれらの問題を解決したのがインフレーション理論である．

3 宇宙の歴史

膨張宇宙の初期はどんな物理的な状態で，いったいどのような事件が起こったのかを見ていこう．初期宇宙は超高温のため物質は原子核，素粒子レベルにまで分解されている．したがって初期宇宙を理解するのは素粒子物理，原子核物理の知識が必要となる．これらの分野ではエネルギーは電子ボルト（eV）単位で測られるのが普通であるので，この章でもこの単位を用いる．$E = k_{\mathrm{B}}T$（k_{B} はボルツマン定数）から電子ボルトと温度は以下の関係にある．

$$1\ \mathrm{eV} = 1.1605 \times 10^4\ \mathrm{K} \tag{3.1}$$

この章では現在の物理学でほぼ完全に理解されている約 100 MeV $= 10^8$ eV に対応する温度約 1 兆 K，ビッグバンから 1 万分の 1 秒後から宇宙の晴れ上がりの約 38 万年後まで宇宙の歴史をたどってみよう．それ以前の宇宙については，素粒子論の知識を必要とするので後の章で触れることにする．

3.1　宇宙膨張と脱結合

初期宇宙における様々な反応を調べるためには，まず初期宇宙の温度を宇宙時間の関数として知っておく必要がある．

放射のエネルギー密度は

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4 \tag{3.2}$$

ここで g_* は相対論的自由度数と呼ばれ，放射（超相対論的物質）とみなされるすべての粒子の自由度の数で，温度によって相対論的になる粒子の種類が変わるので温度の関数である．g_{i} を，i 種粒子の相対論的自由度とすると次のよう

に表される.

$$g_* = \sum_{\rm i} g_{\rm B,i} + \frac{7}{8}\sum_{\rm i} g_{\rm F,i} \tag{3.3}$$

と書ける．添え字 B はボソン，F はフェルミオンに対応する．フェルミオンの寄与の前に 7/8 がつくのは，ボーズ統計に対するフェルミ統計の違いである．後に見るようにすべての相対論的粒子が同じ温度をもつとはかぎらず，異なる温度で熱平衡分布をとることがある．その場合には，i 種粒子の温度を $T_{\rm i}$ とし，放射の代表定な温度を T とすると，相対論的自由度数は次のように書ける.

$$g_* = \sum_{\rm i} g_{\rm B,i}\left(\frac{T_{\rm i}}{T}\right)^4 + \frac{7}{8}\sum_{\rm i} g_{\rm F,i}\left(\frac{T_{\rm i}}{T}\right)^4 \tag{3.4}$$

したがって放射優勢期でのフリードマン方程式は

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_r = \frac{4\pi^3 G}{45} g_* T^4 \tag{3.5}$$

放射優勢時では，$a(t) \propto t^{1/2}$ だから上の式から

$$t = \frac{1}{2H} = \left(\frac{45}{16\pi^3 G}\right)^{1/2} g_*^{-1/2}\left(\frac{T}{\hbar c}\right)^{-2} \simeq 2.4 g_*^{-1/2}\left(\frac{T}{\rm MeV}\right)^{-2}\ {\rm s} \tag{3.6}$$

となる．質量をもった粒子もその静止質量エネルギーに相当する温度以上では超相対論的とみなされるから実際には g_* は時間の関数で，宇宙の初期ほど大きな値となるが，上式を導く際にはこの変化を無視した．1 MeV $\simeq$ 110 億度前後の温度では相対論的な粒子は，光子，3 種類のニュートリノとその反粒子，そして電子とその反粒子である陽電子だけなので，

$$g_* = 2 + \frac{7}{8}\cdot 4 + \frac{7}{8}\cdot 6 = 10.75 \tag{3.7}$$

と計算される．したがって

$$t \simeq 0.88\left(\frac{T}{10^{10}\,{\rm K}}\right)^{-2}\ {\rm s} \simeq 0.73\left(\frac{T}{\rm MeV}\right)^{-2}\ {\rm s} \tag{3.8}$$

となる.

さて宇宙初期の超高温，超高密度状態ではいろいろな素粒子反応が起こるが，宇宙膨張のためそれらの反応が起こる時間はかぎられている．これは反応が起こるには温度や密度によって決まる反応時間が必要であるが，その間に宇宙膨

張によって温度や密度が急激に変わってしまうからである．このことを脱結合，あるいは反応の落ちこぼれという．宇宙膨張の時間スケールは，その時点でのハッブルパラメータ H（の逆数）で表される．一方，反応の時間スケールは以下のようにして評価される．いま i 種粒子と j 種粒子の衝突によって k 種粒子と ℓ 種粒子ができる 2 体の反応 $\mathrm{i}+\mathrm{j} \leftrightarrow \mathrm{k}+\ell$ を考える．この反応の断面積を $\sigma_{\mathrm{ij}\to\mathrm{k}\ell}$ とすると，これに粒子間の相対速度 v_{ij} をかければ，単位時間あたり，単位体積あたりに起こる反応の回数が与えられる．i 種粒子 1 個あたりの単位時間あたりの回数は

$$\Gamma_{\mathrm{ij}\to\mathrm{k}\ell} = n_{\mathrm{j}}\sigma_{\mathrm{ij}\to\mathrm{k}\ell}v_{\mathrm{ij}} \tag{3.9}$$

となる．これを反応率と呼び，この逆数が反応の時間スケールを与える．ここで n_{j} は j 種粒子の数密度である．

したがって反応率 $\Gamma_{\mathrm{ij}\to\mathrm{k}\ell}$ をもった反応が宇宙の中で起こるためには

$$\Gamma_{\mathrm{ij}\to\mathrm{k}\ell} > H \tag{3.10}$$

という条件が必要であることが分かる．

一般に反応率もハッブルパラメータも時間の減少関数であるが反応率の温度依存性が大きいため初期宇宙ではこの条件が満たされる．しかし温度の低下とともに反応率が急激に下がり，ある温度でこの条件が破れる．これを反応の落ちこぼれ，あるいは脱結合という．初期宇宙の歴史は脱結合の連続であり，宇宙はいくつかの脱結合を起こしながら現在の宇宙へと進化していく．この例を時間の順序で見てみよう．ただし脱結合の温度を正確に知るには，粒子の分布関数に対するボルツマン方程式を解く必要があるが，ここでは脱結合の条件を $\Gamma = H$ とおいて，議論する．したがって以下で導かれる数値は有効数字何桁を問題とするような正確な値ではないことを断っておく．

3.1.1　WIMPs

冷たい暗黒物質の候補は，超対称性理論に現れるある種の中性粒子や強い相互作用の理論に現れるアキシオンと呼ばれる粒子などいくつか提案されている．その種類によって現在の宇宙に残るメカニズムが違うが，ここでは暗黒物質粒子が脱結合によって現在の宇宙に残る場合を考えよう．まず暗黒物質の候補の粒子を粒子 X とし，粒子 X は粒子 f とのみ対生成，対消滅で相互作用してい

るとする．

$$X + \bar{X} \leftrightarrow f + \bar{f} \tag{3.11}$$

ただし粒子 f は強い相互作用をし，常に熱平衡分布になっているとする．この反応の反応率とハッブルパラメータが等しくなると，反応が落ちこぼれて粒子 X の分布は平衡値からずれてくる．脱結合時，X 粒子は非相対論的とする．反応の断面積を σ，粒子間の相対速度を v とすれば

$$n_X \langle \sigma v \rangle = H \tag{3.12}$$

これを満たすスケール因子を a_{dec}，温度を T_{dec} と書くと

$$n_X(a_{\mathrm{dec}}) = \frac{H(a_{\mathrm{dec}})}{\langle \sigma v \rangle} = \sqrt{\frac{4\pi^3 G g_*}{45}} \frac{T_{\mathrm{dec}}^2}{\langle \sigma v \rangle} \tag{3.13}$$

宇宙が断熱膨張しているかぎり座標体積あたりのエントロピーは保存されるので，エントロピー密度を s と書くと，$sa^3 =$ 一定となる．一方，脱結合時粒子 X は非相対論的だから，$n_X a^3 =$ 一定である．したがって

$$\frac{n_X(a_{\mathrm{dec}})}{s(a_{\mathrm{dec}})} = \frac{n_{X,0}}{s_0} \tag{3.14}$$

となり，現在の宇宙のエントロピー密度 s_0 は分かっているので，n_X をエントロピー密度で割ったものを考えると便利である．

$$\frac{n_X(a_{\mathrm{dec}})}{s(a_{\mathrm{dec}})} = \frac{n_X(a_{\mathrm{dec}})}{g_{*S}(T_{\mathrm{dec}})(2\pi^2/45)T_{\mathrm{dec}}^3} \simeq 1.5 \frac{g_*^{1/2}}{g_{*S}} \frac{1}{M_{\mathrm{pl}} T_{\mathrm{dec}} \langle \sigma v \rangle} \tag{3.15}$$

ここで g_{*S} はエントロピーに対する相対論的自由度数，M_{pl} はプランク質量で，それぞれ以下のように定義される．

$$g_{*S}(T) = \sum_{\mathrm{i}} g_{\mathrm{B,i}} \left(\frac{T_{\mathrm{i}}}{T}\right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{\mathrm{i}} g_{\mathrm{F,i}} \left(\frac{T_{\mathrm{i}}}{T}\right)^3$$

$$M_{\mathrm{pl}} = \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2} \simeq 1.22 \times 10^{19}\,\mathrm{GeV} \tag{3.16}$$

こうして

$$n_{X,0} = \frac{n_X(a_{\mathrm{dec}})}{s(a_{\mathrm{dec}})} s_0 \tag{3.17}$$

これに m_X をかけ臨界密度で割ると

$$\Omega_{X,0} = \frac{m_X n_X(a_{\rm dec})}{s(a_{\rm dec})}\frac{s_0}{\rho_{\rm cr,0}} \simeq \frac{g_*^{1/2}}{g_{*S}}\frac{m_X({\rm GeV})}{T_{\rm dec}}\left(\frac{6.6\times 10^{-38}\,{\rm cm}^2}{\langle\sigma v\rangle}\right) \tag{3.18}$$

ここで $s_0/\rho_{\rm cr,0} \simeq 1.74\times 10^{-9}\,{\rm GeV}$ を用いた．$T_{\rm dec}$ は，(3.13) 式を数値的に解いて得られるが，$n_X(T)$ が指数関数的に温度に依存するので，断面積には大きく依存せず m_X が 10 GeV から 100 GeV の範囲で大ざっぱに $T_{\rm dec} \simeq m_X/20$ と近似できる．これを採用すると

$$\Omega_{X,0} \simeq \left(\frac{10^{-37}\,{\rm cm}^2}{\langle\sigma v\rangle}\right) \tag{3.19}$$

となる．

したがって弱い相互作用程度の十分小さな断面積を持った粒子が冷たい暗黒物質の候補になる．このような 10 から 100 GeV 程度の質量をもち相互作用の非常に小さな粒子を，weakly interacting massive particles（WIMPs）という．

WIMPs の脱結合はこの章で考える時期よりはるかに初期であるが，ここでは脱結合の例として述べた．

3.1.2 ニュートリノ脱結合

ビッグバンから約 10 万分の 1 秒後，温度が約 1 兆度に下がった宇宙では陽子，中性子と電子，陽電子，3 種類のニュートリノとその反粒子，そして光子が十分頻繁に相互作用し熱平衡状態にあった．このほかに暗黒物質粒子も存在するが，その質量は 100 GeV 程度と想定されるので非相対論的であり，すでにほかの粒子とは相互作用をしていないと思われる．また電子の次に重たいミューオンの質量は約 140 MeV で非相対論的になっている．ニュートリノは弱い相互作用しかしないので反応率は小さいが，電子と以下の相互作用をすることで熱平衡になっている．

$$\nu + {\rm e}^{\pm} \leftrightarrow \nu + {\rm e}^{\pm},\ \nu + \bar{\nu} \leftrightarrow {\rm e}^{+} + {\rm e}^{-} \tag{3.20}$$

この反応の断面積は弱い相互作用のフェルミ定数 $G_{\rm F} = 1.2\times 10^{-5}\,{\rm GeV}^{-2}$ を用いて次のように書け，

$$\sigma \simeq G_{\rm F}^2 E^2 \tag{3.21}$$

数密度は温度の 3 乗に比例するから

$$\Gamma \simeq G_{\mathrm{F}}^2 T^5 \tag{3.22}$$

となる．これからハッブルパラメータとの比は次のように計算される．

$$\frac{\Gamma}{H} \simeq \left(\frac{T}{1.5\ \mathrm{MeV}}\right)^3 \tag{3.23}$$

したがって $T \simeq 1.5\ \mathrm{MeV} \simeq 1.6 \times 10^{10}\,\mathrm{K}$ でニュートリノは脱結合，すなわちほかの粒子と相互作用を絶つことになる．このニュートリノはフェルミ分布を保ったままスケール因子に反比例して温度を下げ現在も宇宙に満ちており宇宙ニュートリノ背景放射となっている．

ニュートリノ脱結合の後，宇宙の温度が約 60 億度まで下がると，光子同士の衝突からは電子，陽電子対がつくれなくなり対消滅で宇宙から消えていく．電子・陽電子対が消えると放射への自由度が $7/8 \times 4 = 3.5$ だけ減ることになり，放射の温度の減り方が少し鈍り，ニュートリノの温度と違ってくる．

この違いは電子・陽電子消滅前後でエントロピーが保存されることから計算することができる．放射のエントロピーは

$$s = g_{*S}\frac{4\pi^2}{90}T^3 \tag{3.24}$$

これから脱結合後の放射に寄与するのは，光子とニュートリノだけであるから

$$10.75T_{\nu,\,\text{前}}^3 a^3 = 2T_{\gamma,\,\text{後}}^3 a^3 + \frac{7}{8} \times 6T_{\nu,\,\text{後}}^3 a^3 \tag{3.25}$$

ただし脱結合前の $T_\gamma = T_\nu$ の関係を使った．この式で脱結合前後でニュートリノの温度が変わらない $T_{\nu,\,\text{前}} = T_{\nu,\,\text{後}}$ を用いると

$$T_{\nu,\,\text{後}} = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_{\gamma,\,\text{後}} \tag{3.26}$$

が得られる．この関係はニュートリノの脱結合以後，現在まで続いている．したがって現在の宇宙でのニュートリノ背景放射の温度は，

$$T_{\nu,0} = 2.725 \times \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} \simeq 1.95\ \mathrm{K} \tag{3.27}$$

となっている．

実際にはニュートリノは質量をもっているが，第 1 章で述べたように観測的には 3 種類のニュートリノを合わせても 0.8 eV 以下，素粒子実験では 0.3 eV

程度である．0.01 eV としても 100 K 程度であるから現在はすでに非相対論的になっている．その数密度は

$$n_{\nu,0} = 6\frac{\zeta(3)}{4\pi^2}T_{\nu,0}^3 = \frac{6}{11}\zeta(3)T_{\rm CMB}^3 \simeq 112 \ {\rm cm}^{-3} \tag{3.28}$$

であるから質量密度は

$$\rho_{\nu,0} = \sum_{\text{non-rel.}\nu} m_\nu c^2 n_{\nu,0} \simeq 112\left(\frac{T_{\rm CMB,0}}{2.725 \ {\rm K}}\right)^3 \sum_{\text{non-rel.}\nu} m_\nu c^2 \tag{3.29}$$

ここで和は 3 種類のニュートリノのうち非相対論的なニュートリノに対する和である．これから対応する密度パラメータは次のようになる．

$$\Omega_{\nu,0}h^2 \simeq 10^{-4}\left(\frac{\sum_{\text{non-rel.}\nu} m_\nu}{0.01 \ {\rm eV}}\right) \tag{3.30}$$

電子・陽電子対消滅以降の宇宙の温度と時間の関係は，電子と陽電子のスピン自由度が減ったこととニュートリノの温度が光子の $(4/11)^{1/3}$ となったことを考慮すると以下のように変わる．

$$t \simeq 1.3\left(\frac{T}{10^6 \ {\rm K}}\right)^{-2} {\rm s} \tag{3.31}$$

問題：　電子・陽電子対消滅以降の時間と温度の関係を計算せよ．

3.2　宇宙初期の軽元素合成

宇宙初期の高温度，高密度状態は星の中心同様に核融合反応が起こる．ガモフがビッグバン理論を考えた動機も宇宙初期の核反応によって現在の宇宙に存在するすべての元素をつくることだった．しかし星の内部と違い宇宙では膨張によって時々刻々，温度，密度が下がっていく．これによって宇宙初期の核反応はあっという間に止まってしまう．実際に宇宙初期にできるのはほとんどがヘリウム原子核であり，ほかには重水素やリチウムなどの軽い元素がごく少量できるにすぎない．この元素合成の様子を詳しく見てみよう．

3.2.1　ヘリウムの合成

電子の対消滅の少し前までの宇宙では，弱い相互作用によって

$$\mathrm{n} + \mathrm{e}^{+} \leftrightarrow \mathrm{p} + \bar{\nu}_{\mathrm{e}} \tag{3.32}$$

$$\mathrm{n} + \nu_{\mathrm{e}} \leftrightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^{-} \tag{3.33}$$

$$\mathrm{n} \leftrightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^{-} + \bar{\nu}_{\mathrm{e}} \tag{3.34}$$

これらの反応で陽子，中性子，電子，陽電子，電子ニュートリノ，反電子ニュートリノは反応の前後で化学ポテンシャルの和が等しいような平衡にあった．したがって

$$\mu_n + \mu_e = \mu_p + \mu_\nu \tag{3.35}$$

が成り立つが，以下の事情によって電子やニュートリノの化学ポテンシャルは無視する．まず統計力学から

$$n_{e^-} - n_{e^+} = \frac{1}{3}\mu_e T^2 \tag{3.36}$$

より

$$\frac{\mu_e}{T} \simeq \frac{n_p}{T^3} \simeq \frac{n_p}{n_\gamma} \ll 1 \tag{3.37}$$

ここで電荷の中性条件 $n_{e^-} - n_{e^+} = n_p$ を用いた．光子数が T^3 に比例するから，この比はバリオン数と光子数の比でほぼ同じで圧倒的に小さい．こうして電子の化学ポテンシャルは無視できると考えられる．ニュートリノの化学ポテンシャルが無視できるほど小さいという直接的な証拠はないが，電子と電子ニュートリノは第一世代のレプトンと呼ばれ同じ種族に属するので通常電子の化学ポテンシャル程度に無視できるとする．こうして上の反応から陽子と中性子の化学ポテンシャルが等しいという条件が得られる．

$$\mu_n = \mu_p \tag{3.38}$$

陽子（中性子）は非相対論的なのでその数密度はボルツマン分布で与えられる．

$$n_{p(n)} = 2\left(\frac{m_{p(n)}T}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m_{p(n)} - \mu_{p(n)}}{T}\right] \tag{3.39}$$

したがって

$$\frac{n_n}{n_p} = \exp\left(-\frac{\Delta m}{T}\right) \tag{3.40}$$

が得られる．ここで Δm は中性子と陽子の質量差である．

$$\Delta m = m_n - m_p \simeq 1.3\ \mathrm{MeV} \tag{3.41}$$

したがって，この質量差よりも十分高温では中性子の数と陽子の数は同数となる．温度が下がるにつれて中性子の方が重たいのでいくぶん陽子に比べて数が減るが平衡状態が実現しているかぎり中性子と陽子の数の比は上式で与えられる．

しかしこの反応も宇宙膨張による温度低下で落ちこぼれる．上の反応の反応率は弱い相互作用によって起き，ニュートリノの脱結合と同じオーダーとなるが，ハドロンが含まれることから詳細が異なり反応率が若干上がり，その分脱結合の時間が遅れ，0.75 MeV 程度（ビッグバン約 2 秒後）となる．このとき

$$\frac{n_n}{n_p} \simeq \exp\left(-\frac{1.3}{0.8}\right) \simeq \frac{1}{6} \tag{3.42}$$

となり，中性子と陽子の数の比が 1：6 となる．その後も中性子は自然に β 崩壊で陽子に変わるのでこの比は，重水素（陽子と中性子からできた原子核）ができるまで徐々に減っていく（図 3.1）．

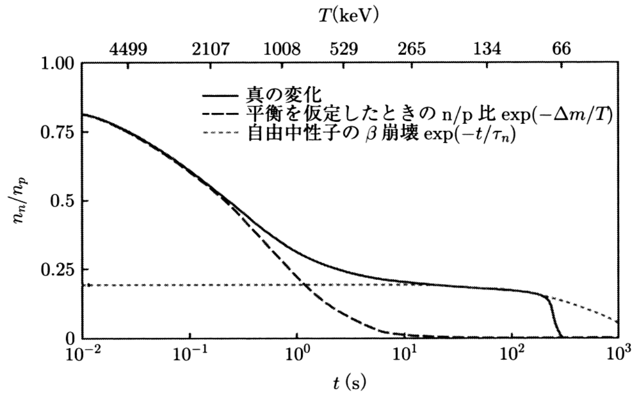


図 3.1 中性子・陽子比の時間変化

破線は平衡の場合の比で実際の変化は実線．これからビッグバン後 1 秒弱で平衡からずれ始めることが分かる．200 秒頃の急激な減少はヘリウムができたため．[G. Steigman, "Primordial Nucleosynthesis in the Precision Cosmology Era", *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **57**, 463, 2007]

重陽子は次の反応

$$\mathrm{n} + \mathrm{p} \to \mathrm{D} + \gamma \tag{3.43}$$

によってできる．このとき重水素の束縛エネルギーは約 2.2 MeV なので，エ

ネルギー的にはそれに対応する温度で反応が起こるが，実際には温度がそこまで下がっても光子数はバリオンの数十億倍も多いためプランク分布の高エネルギー領域の光子のためにできてもすぐに壊されてしまう．実際に重水素ができ始めるのは，温度が十分下がって 2.2 MeV 以上のエネルギーをもった光子の数がバリオンの数程度になってからである．プランク分布の高エネルギー領域 $(E_\gamma \gg T)$ では光子数は $\exp(-E_\gamma/T)$ に従って減少するから，この条件は次のように書ける．

$$\frac{n_\gamma \exp\left(-2.2\ \mathrm{MeV}/T\right)}{n_p} \simeq 1 \tag{3.44}$$

光子・バリオン数の比は $n_\gamma/n_p \simeq 10^{10}$ だから重水素ができ始める温度は

$$T_d \simeq \frac{2.2\ \mathrm{MeV}}{\ln 10^{10}} \simeq 0.1\,\mathrm{MeV} \tag{3.45}$$

と評価される．これはビッグバンから約 3 分後で，このとき中性子・陽子比は β 崩壊の寿命を $\tau_n \simeq 886$ s として

$$\frac{n_n}{n_p} \simeq \frac{1}{6}\exp\left(-\frac{t-t_n}{\tau_n}\right) \simeq \frac{1}{7} \tag{3.46}$$

と評価される．重水素ができると，次の一連の反応が引き続き起こり一気にヘリウム原子核ができる（図 3.2）．

$$\mathrm{D}+\mathrm{D} \to {}^3\mathrm{He}+\mathrm{n} \tag{3.47}$$

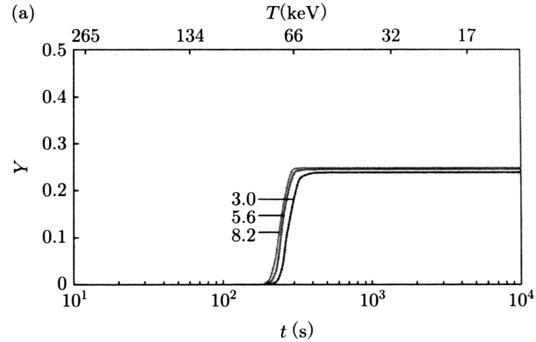
$${}^3\mathrm{He}+\mathrm{n} \to \mathrm{T}+\mathrm{p} \tag{3.48}$$

$$\mathrm{T}+\mathrm{D} \to {}^4\mathrm{He}+\mathrm{n} \tag{3.49}$$

これらの反応によってその時点で残った中性子のほとんどはヘリウム原子核に取り込まれてしまう．したがってヘリウムの重量比は次のように計算される．

$$Y = \frac{(n_n/2)(2m_p+2m_n)}{n_p m_p + n_n m_n} \simeq \frac{2n_n/n_p}{1+n_n/n_p} \simeq 0.25 \tag{3.50}$$

実際にはヘリウムをつくる際に，重水素，トリチウム，ヘリウム 3 がわずかに残る．また残ったトリチウムとヘリウム 3 はヘリウムと融合してリチウムをつくる．いずれにせよヘリウム以外の軽元素はごくわずかしかできず，それらより重たい元素は初期宇宙ではできない．この理由は，質量数 5 と 6 に安定な原子核が存在しないことや，宇宙膨張による温度と密度の低下によって融合反



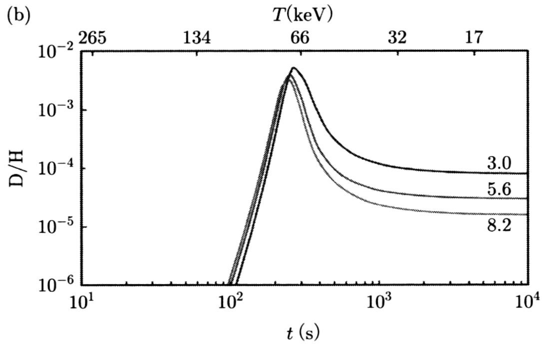


図 3.2 ヘリウム (a) と重水素量 (b) の時間変化

図中の数値はバリオン光子比 ($\times 10^{-10}$). (a) の縦軸は, (3.50) の Y, (b) の縦軸は, 水素に対する重水素の存在比. [G. Steigman, "Primordial Nucleosynthesis in the Precision Cosmology Era", *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **57**, 463, 2007]

応そのものが起こりにくくなるからである.

標準理論からのずれの影響

元素合成の計算は, 上にも述べたようにバリオン・光子数比, 宇宙膨張, 中性子の寿命などによっている. したがってたとえば宇宙初期に光子, 3 種類のニュートリノ以外の何らかの放射成分があれば, 膨張速度が変わり, 陽子・中性子比が熱平衡から落ちこぼれた後, 重元素が合成されるまでの時間が変わり合成されるヘリウム量などが変わってくる. また上には触れなかったが, レプトン数の非対称性も元素合成に影響する. 電子と陽電子の数の差によるレプトン数の非対称性は宇宙の総電荷が中性であることからバリオン非対称性程度とい

う小さな値であるので，宇宙でもし大きなレプトン数の破れがあると，それはバリオンニュートリノと反ニュートリノの数の差として現れる．これはニュートリノの化学ポテンシャル μ_ν がゼロでないことを意味する．この非対称性は弱い相互作用の荷電カレントによる陽子と中性子の反応に現れ，したがって生成されるヘリウム量を変化させる．

これらの効果を考慮して計算したヘリウムの重量比 Y_P や重水素とリチウムの水素に対する数の比（それぞれ $(\mathrm{D/H})_P$, $(\mathrm{Li/H})_P$）は次式でよく近似できる．

$$\begin{aligned} Y_P &= 0.2381 \pm 0.0006 + 0.0016\eta_{\mathrm{He}} \\ y_{\mathrm{D}} &\equiv 10^5(\mathrm{D/H}) = 45.7(1 \pm 0.06)\eta_{\mathrm{D}}^{-1.6} \\ y_{\mathrm{Li}} &\equiv 10^{10}(\mathrm{Li/H}) = 4.82(1 \pm 0.10)(\eta_{\mathrm{Li}}/6)^2 \end{aligned} \tag{3.51}$$

ただし

$$\begin{aligned} \eta_{\mathrm{He}} &= \eta_{10} + 100(S-1) - 575\xi/4 \\ \eta_{\mathrm{D}} &= \eta_{10} - 6(S-1) + 5\xi/4 \\ \eta_{\mathrm{Li}} &= \eta_{10} - 3(S-1) - 7\xi/4 \end{aligned} \tag{3.52}$$

ここで η_{10} は，10^{10} で規格化したバリオンと光子の数密度の比 $\eta_{10} \equiv 10^{10}\eta_B \equiv 10^{10}(n_B/n_\gamma)$ であり，S と ξ は，それぞれ以下に定義する未知の放射成分によるハッブルパラメータとレプトン非対称性を表す無次元のパラメータである．

$$S \equiv \frac{H'}{H} \tag{3.53}$$

$$\xi_\nu \equiv \frac{\mu_\nu}{T_\nu} \tag{3.54}$$

これらの理論予想を観測値と比較することで，バリオン・光子比，未知の放射成分，宇宙のレプトン数についての情報が得られる．とくに下で見るように元素合成によるバリオン・光子比の制限から，宇宙のバリオンの密度の制限が得られ，CMB の観測から予想されるように宇宙が平坦だとすると，バリオン物質は臨界密度の数%しか占めていないことが結論される．

3.2.2 観測と宇宙論への制限

宇宙初期につくられる軽元素量は星の中心部でもつくられるので，その影響

の少ない観測を行う必要がある．

ヘリウム 4 の観測は主に銀河系外の電離水素ガス領域が用いられる．この領域は HII 領域と呼ばれ，高温の大質量星の紫外線によって水素ガスやヘリウムが電離している．星によってつくられてヘリウムの影響を少なくするためなるべく重元素量の少ない銀河系外の HII 領域が選ばれる．酸素や炭素などの重元素は星の中でしかつくられないため，重元素量が星による影響の目安になるからである．この領域では星からの紫外線によって水素とヘリウムは頻繁に電離と再結合を起こし，その際に放射される光（結合線）を観測することで水素とヘリウムの数密度の比が求められる 銀河系外の 100 個程度の HII 領域の観測から，次のような値が得られている．

$$Y \simeq 0.2565 \pm 0.0060 \tag{3.55}$$

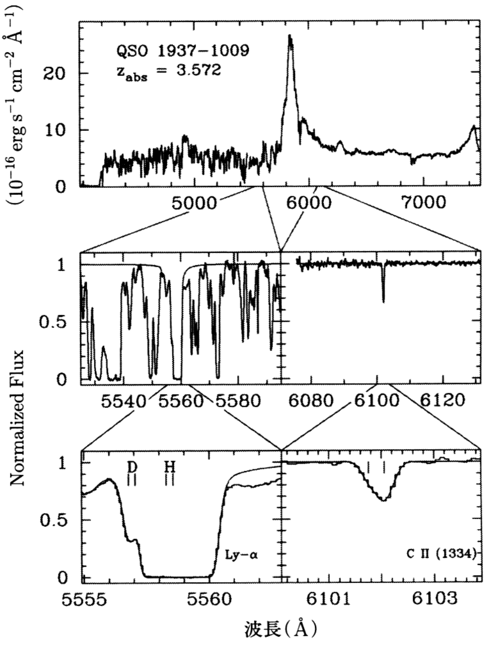


図 3.3　QSO1937−1009 の吸収線

[D. Tytler *et al.*, "Cosmological baryon density derived from the deuterium abundance at redshift $z = 3.57$", *Nature*, **381**, 6579, 207, 1996]

これから

$$\eta_{\rm He} = 11.50 \pm 3.77 \tag{3.56}$$

重水素の観測には，遠方のクェーサーの吸収線が用いられる（図 3.3）．クェーサーは数十億光年以上かなたの宇宙に多く存在する非常に明るい活動銀河核である．クェーサーからの電磁波は途中の宇宙空間にある様々な物質によって吸収を受けるため，そのスペクトルには多くの吸収線が観測される．重水素の吸収線は水素の吸収線よりもわずかに短波長のところに現れる．とくにまだ星が生まれていないような大きな赤方偏移をもった原始水素雲による重水素の吸収線を同定することによって重水素と水素の存在比が次のように見積もられている．

$$y_{\rm D} = 2.53 \pm 0.05 \tag{3.57}$$

これから

$$\eta_{\rm D} = 6.10 \pm 0.24 \tag{3.58}$$

となる．

一方，リチウムや 3 重水素の存在量は，星の中での元素合成によって大きく影響を受けるため宇宙初期起源の元素量を正確に求めるのは極めて困難である．リチウム（^{7}Li）は，銀河系の球状星団中の種族 II と呼ばれる古い星で，とくに重元素量の小さな星のスペクトルを観測することで次のような値が得られている．

$$A({\rm Li}) \equiv 12 + \log_{10}({\rm Li/H})_P \simeq 2.2 \pm 0.1 \tag{3.59}$$

この値は元素合成の理論予想よりかなり小さく，この理論値と観測値の違いは，「リチウム問題」と呼ばれている．

以上の観測から次のような宇宙論パラメータについての情報が得られる．まず標準的な $S = 1, \xi = 0$ の場合，重水素の理論予想と観測量の比較から宇宙のバリオン・光子比について

$$\eta_{\rm D} = \eta_{10} = 5.96 \pm 0.28 \tag{3.60}$$

が得られる．これは密度パラメータにすると

$$\Omega_{b,0} = 0.0218 \pm 0.0010 \tag{3.61}$$

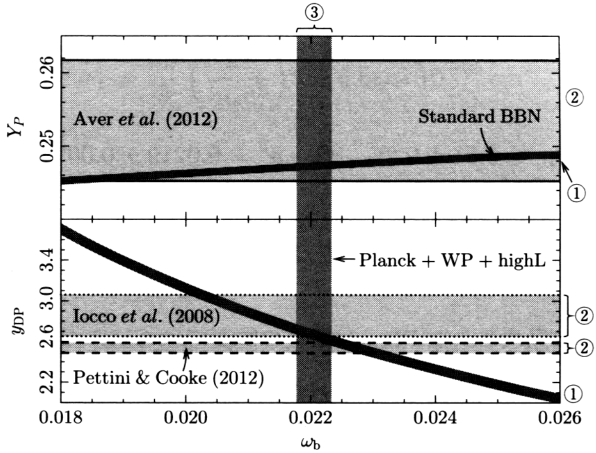


図 3.4 ヘリウム（上），重水素（下）の観測と理論の比較
横軸はバリオン密度 $\omega_b = \Omega_b h^2$．①の範囲が理論予想で幅は核反応率の不定性による．②の範囲が観測値で幅は観測誤差．③の範囲が Plank 衛星などで得られたバリオン密度の範囲．［Planck Collaboration, 2013］

となり，平坦な宇宙では現在の物質の大半は非バリオン物質であることが分かる．この値を用いると

$$Y_P = 0.2476 \pm 0.0007 \tag{3.62}$$

となり，若干理論値よりも小さな値を与える．リチウムに関しては

$$A(\mathrm{Li}) \equiv 12 + \log_{10}(\mathrm{Li/H})_P = 2.68 \pm 0.06 \tag{3.63}$$

となり，観測値 $A(\mathrm{Li}) \simeq 2.2$ より $\log_{10} 3 = 0.48$ 程度大きくなってしまう．これがリチウム問題である．この違いの原因はまだよく分かっていないが，星内部の対流などの影響で表面のリチウムが内部に隠れてしまうなどいくつかの影響が考えられている．

レプトン非対称性がなく，未知の放射成分があるとすると上の制限から

$$\begin{aligned} &\eta_{10} = 6.27 \pm 0.34 \quad (\Omega_{\mathrm{b},0} h^2 = 0.0229 \pm 0.0012) \\ &\Delta N = 0.66^{+0.47}_{-0.45} \end{aligned} \tag{3.64}$$

という制限が得られる．ここで ΔN は未知の放射成分の数である．これを見ると未知の放射成分が存在する可能性もあるが，統計的な誤差が大きく 0 である

可能性も捨てきれない.

一方, 放射成分が光子と既知のニュートリノだけとして, レプトン非対称性があるとすると

$$\begin{aligned} &\eta_{10} = 6.01 \pm 0.28 \quad (\Omega_{\mathrm{b},0}h^2 = 0.0219 \pm 0.0010) \\ &\xi = -0.038 \pm 0.026 \end{aligned} \tag{3.65}$$

どちらの場合も期待されるリチウム量は, 実際に観測されている量よりも 3 倍から 4 倍多い.

2013 年 3 月に発表された Planck 衛星の観測では CMB だけの制限から

$$\begin{aligned} &\Omega_b h^2 = 0.02207 \pm 0.00027 \\ &\Delta N = 0.31 \pm 0.34 \end{aligned} \tag{3.66}$$

が得られている. 誤差から分かるように CMB の方がバリオン密度決定の精度は 1 桁ほどよい. CMB の温度揺らぎからバリオンの密度がどのように決まるかは第 5 章で説明する. また未知の放射成分はない確率が高い. このバリオン密度からヘリウムと重水素量がそれぞれ以下のように求められる.

$$\begin{aligned} &Y = 0.24725 \pm 0.00032 \\ &y_{\mathrm{D}} = 2.656 \pm 0.067 \end{aligned} \tag{3.67}$$

以上の結果は元素合成の計算結果とリチウムを除いては誤差の範囲で矛盾はなく, ビッグバン理論の基本的な正しさを少なくともニュートリノの脱結合まで検証しているといっていいだろう.

3.3 光子・バリオン流体

軽元素合成が終わった宇宙には, 熱い光子流体の中に, その数十億分の 1 程度の数の陽子, ヘリウム原子核, 電子が存在した. 光子は電子とトムソン散乱, 電子は陽子, ヘリウム原子核とクーロン散乱によって, これらは強く結びつき 1 流体のように振舞っていた. どのくらい強く結合していたかを見るためにトムソン散乱による光子の平均自由行程 λ_{T} を計算してみよう. これは

$$\lambda_{\mathrm{T}}^{-1} = n_e \sigma_{\mathrm{T}} \tag{3.68}$$

ここで σ_T はトムソン散乱の断面積

$$\sigma_\mathrm{T} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 = 6.68 \times 10^{-25}\,\mathrm{cm}^2 \tag{3.69}$$

また電子の数密度は

$$n_e = n_p \simeq 1.12 \times 10^{-5}\Omega_b h^2 (1+z)^3 \tag{3.70}$$

ここでヘリウムの寄与は無視し，電子は完全電離しているとした．したがって平均自由行程は

$$\lambda_\mathrm{T} \simeq 2.25 \times 10^6 (1+z)^{-3}\,\mathrm{kpc} \tag{3.71}$$

となる．ここで $\Omega_{b,0}h^2 \simeq 0.02$ とした．一方，地平面半径は

$$R_H(z) = \frac{2c}{H_0 \Omega_{m,0}^{1/2}}(1+z)^{-3/2} \tag{3.72}$$

だから，たとえば等密度時（$z_\mathrm{eq} = 3400$）での平均自由行程と地平面半径との比は

$$\frac{\lambda_\mathrm{T}}{R_H}(z_\mathrm{eq} = 3400) \simeq 0.0007 \tag{3.73}$$

となる．このように光子は衝突と衝突の間に地平面半径と比べて十分短い距離しか進むことができない．また電子と陽子，ヘリウム原子核はクーロン相互作用でやはり結びついている．したがってこの後に述べる宇宙の晴れ上がりまで光子とバリオン物質は一体となって運動していたと考えてよい，この光子とバリオンが一体とみなせる流体を，光子・バリオン流体と呼ぶ．

この流体は暗黒物質の揺らぎによってできた重力ポテンシャルによって圧縮されるが，そのまま収縮せず大きな放射の圧力のため粗密波（音波）として伝播する．このときの音速 c_s は以下のように与えられる．

$$c_s^2 = \frac{dP}{d\rho} = \frac{d(P_r)}{d(\rho_b + \rho_r)} = \frac{d(1/3\rho_r)}{d(\rho_b + \rho_r)} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+R} \tag{3.74}$$

ここで

$$R = \frac{3\rho_b}{4\rho_r} = R_\mathrm{eq}\frac{a}{a_\mathrm{eq}} \tag{3.75}$$

とおいた．また R_eq は等密度時での R の値である．具体的には

$$R_\mathrm{eq} = \frac{3}{4}a_\mathrm{eq}\frac{\Omega_{b,0}}{\Omega_{\gamma,0}} \simeq 0.1971\left(\frac{\Omega_{b,0}h^2}{0.022}\right)\left(\frac{\Omega_{m,0}h^2}{0.14}\right)^{-1} \tag{3.76}$$

したがって音速は宇宙初期の放射優勢時には光速度の58%程度だが，等密度時には光速度の53%ほどになり，宇宙の晴れ上がりの直前には光速度の46%ほどにまで遅くなる．

3.4 等密度時から宇宙の晴れ上がりへ

上に述べたように光子とバリオン物質は強く結びついているが，いつまでもこの状態は続かない．宇宙が膨張し温度が下がってくると，トムソン散乱の平均自由行程が地平面の大きさに比べてどんどん長くなっていく．さらに電子は陽子やヘリウム原子核に取り込まれ，中性の原子になり，自由電子の数が減ってしまう．

3.4.1 電離度の変化

そこで電子の数密度の変化を見てみよう．まず陽子と電子の反応

$$\mathrm{p} + \mathrm{e}^- \leftrightarrow \mathrm{H} + \gamma \tag{3.77}$$

が化学平衡にあるとしてみる．今考えている状況では光子以外のすべての粒子に対して $T \ll m_i$ が成り立つから，光子以外はボルツマン分布をとっている．

$$n_i = g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_i - \mu_i}{T}\right), \ i = \mathrm{p}, \mathrm{e}, \mathrm{H} \tag{3.78}$$

平衡条件から反応前と後の化学ポテンシャルの和は等しく，光子の化学ポテンシャルは0だから

$$\mu_p + \mu_e = \mu_{\mathrm{H}} \tag{3.79}$$

分布関数とこの条件から，$g_p = g_e = 2$, $g_{\mathrm{H}} = 4$ に注意すると

$$n_p n_e = n_{\mathrm{H}} \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-B/T} \tag{3.80}$$

が得られる．ここで B は水素の結合エネルギーである．

$$B = m_p + m_e - m_{\mathrm{H}} = 13.6 \ \mathrm{eV} \tag{3.81}$$

ここで

$$x_e = n_e/n_b \tag{3.82}$$

$$n_{\rm H} = n_b - n_p = (1 - x_e)n_b \tag{3.83}$$

として電離度 x_e を使って上式を表すと,

$$\frac{x_e^2}{1-x_e} = \frac{1}{n_b}\left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-B/T} \tag{3.84}$$

さらにバリオン・光子数比 η を使うと，結合エネルギーよりもはるかに低い温度で水素ができ始めるのが見て取れる.

$$\frac{1-x_e}{x_e^2} = \eta\frac{4\sqrt{2}\zeta(3)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{T}{m_e}\right)^{3/2}\exp\left(\frac{13.6\ \text{eV}}{T}\right) \tag{3.85}$$

これから $x_e = 0.1$ とすると $T \simeq 0.3$ eV，対応する赤方偏移が約 1300 となる.

実際はこれほど簡単ではない．まず上で仮定した電離平衡は温度が数千 K では成り立っていない．これはその時点で 13.6 eV 以上のエネルギーをもっている光子がほとんど存在しないことによる．さらに再結合は電子が水素の基底状態に捕獲されることでは起こらない．このとき放射される光子は，中性原子をすぐに電離してしまうからである．実際の中性化は，まず電子は励起状態の 1 つに落ち込み，次に基底状態に落ちることによって起こる．また約 5000 K でヘリウム原子ができることも考慮しなければならない．図 3.5 は以上を考慮し

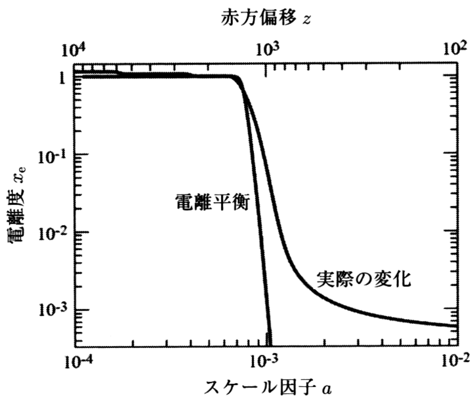


図 3.5 電離度の変化

[W. Hu, "Lecture Notes on CMB Theory: From Nucleosynthesis to Recombination", arXiv:0802.3688, 2008]

て計算した電離度と電離平衡を仮定した計算を示す．この図から，$z \simeq 1500$ ($T \simeq 4000$ K) までは電離平衡と考えることができるが，それ以下では電離平衡の結果よりもかなり大きく，現在でも $x_e \simeq 10^{-4}$ 程度の電離度が残っていることが分かる．この残った自由電子による散乱によって物質の温度は赤方偏移が 200 程度まで CMB 光子と同じになる．赤方偏移が $800 < z < 1200$ の間で電離度の赤方偏移依存性を表す以下のような近似式が知られている．

$$x_e(z) = 2.4 \times 10^{-3} \frac{\sqrt{\Omega_{m,0}h^2}}{\Omega_{b,0}} \left(\frac{z}{1000}\right)^{12.75} \tag{3.86}$$

3.4.2 最終散乱面

では光子が散乱を受けずに進めるようになる時期を求めてみよう．このときの赤方偏移一定の空間を最終散乱面という．そのためにトムソン散乱に対する光学的厚さ τ を定義する．

$$\tau = \int \sigma_{\mathrm{T}} x_e n_b \, dt \tag{3.87}$$

この光学的厚さを上式の電離度の近似式を用いて評価してみよう．時間積分から赤方偏移積分に変えると，

$$\tau = \int_z^0 n_e(z) x_e(z) \sigma_{\mathrm{T}} \left(\frac{dt}{dz}\right) dz \tag{3.88}$$

となるが，ここで $H dt = -a dz$，そして $z \simeq 1000$ 前後で成り立つ近似 $H \simeq H_0 \Omega_{m,0}^{1/2} z^{3/2}$ を使うと，密度パラメータの依存性が打ち消しあうことが分かり，しかも上の積分は容易にできて

$$\tau(z) \simeq 0.37 \left(\frac{z}{1000}\right)^{14.25} \tag{3.89}$$

が得られる．この式から光学的厚さが 1 になるのは，$z = 1072$ であることが分かる．2013 年 3 月の Planck 衛星の観測では，この値は 1090 と与えられている．

実際にはすべての光子が $z = 1072$ で一斉に自由になるわけではなく，最終散乱面はある赤方偏移の幅で広がっている．この幅は透明度を計算することで計算される．透明度 T を，その変化率 dT/T が光学的厚さの変化 $d\tau$ に等しいとすると

$$T(z) = \exp(-\tau(z)) \tag{3.90}$$

したがって赤方偏移が z から $z+dz$ の間で光子が最終散乱される確率は，$dT = (dT/dz)dz$ であるから

$$P(z) = -\frac{dT}{dz} \simeq 5.26\times10^{-3}\left(\frac{z}{1000}\right)^{13.25}\exp\left[-0.37\left(\frac{z}{1000}\right)^{14.25}\right] \tag{3.91}$$

この関数は，$z \simeq 1067$ に幅 $\Delta z \simeq 80$ 程度の鋭いピークをもっている．この赤方偏移幅で光子とバリオン物質の運動は有意に差ができ，そのため温度揺らぎが消されることになる．この減衰をシルク減衰という．

3.5 シ ル ク 減 衰

バリオン・光子流体の音波振動は，宇宙の晴れ上がりの間にバリオンと光子の運動にずれが生じることで摩擦が起こり，そのために減衰する．この減衰が起こるスケールは，光子が電子に散乱される現象を酔歩問題として評価することができる．

共動系で光子の平均自由行程を ℓ とすると，ハッブル時間内に散乱される回数は

$$N = \frac{T_{\rm H}}{a\ell} = \frac{2}{aH\ell} \tag{3.92}$$

したがってこの運動による拡散スケールは

$$\ell_{\rm eff} = \sqrt{N}\ell = \sqrt{\frac{2\ell}{aH}} \tag{3.93}$$

ここで $\sigma_{\rm T}$ をトムソン散乱の断面積，n_e を電子数密度とすると

$$\ell = \frac{1}{an_e\sigma_{\rm T}} \tag{3.94}$$

と書け，またハッブルパラメータを物質優勢として近似すると

$$\ell_{\rm eff} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{n_e\sigma_{\rm T}H}} = \frac{a^{5/4}}{H_0^{1/2}}\sqrt{\frac{2}{n_{b,0}\sigma_{\rm T}\Omega_{m,0}^{1/2}}} \tag{3.95}$$

具体的な数値を入れると

$$\ell_{\rm eff} \simeq 1.62\times10^4(\Omega_{m,0}h^2)^{-1/4}(\Omega_{b,0}h^2)^{-1/2}(1+z)^{-5/4}\,{\rm Mpc} \tag{3.96}$$

宇宙の晴れ上がり時では

$$\ell_{\text{eff}}(z_{\text{LS}}) \simeq 2.58(\Omega_{m,0}h^2)^{-1/4}(\Omega_{b,0}h^2)^{-1/2}\,\text{Mpc} \simeq 24\ \text{Mpc} \tag{3.97}$$

これに対応する天球上の角度スケールは,

$$\theta_{\text{Silk}} = \frac{\ell_{\text{eff}}(z_{\text{LS}})}{\chi(z_{\text{LS}})} \simeq 1.35 \times 10^{-3} \simeq 4.7\ \text{arcmin} \tag{3.98}$$

この角度に対する Planck 衛星の観測値は, 5.5 秒角で, 上の大まかな評価とそれほど違わない. この角度以下の温度揺らぎはならされて消えてしまう.

こうしてビッグバンから約 38 万年後, 宇宙が晴れ上がり, いよいよバリオンは成長を始め数億年程度の間に銀河へと成長していく.

4 構造形成入門

現在の宇宙には第 1 章で見たように銀河，銀河団，超銀河団という階層構造がある．これらの構造は宇宙初期のごく微小な物質の密度揺らぎが重力によって成長してきたものである．この章では宇宙の晴れ上がりから現在にいたるまでの宇宙の歴史を見ていこう．とくにこのような構造は宇宙の初期につくられた微小な暗黒物質の密度揺らぎが重力的に成長した結果どのようにしてできたのかについて詳しく述べる．

4.1 ハリソン–ゼルドビッチスペクトルと地平面

現在の構造形成理論では，密度揺らぎの起源は宇宙初期のインフレーション膨張時の量子揺らぎであると考えられている（第 6 章参照）．量子揺らぎから生成された密度揺らぎは，ランダムなガウス分布で与えられ，波数空間では各モードは独立に振舞う．ガウス揺らぎの統計的な振舞いは，そのパワースペクトル $P(k)$ で表される．

$$\langle\delta(\vec{k})\delta^*(\vec{k}')\rangle = (2\pi)^3 P(k)\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') \tag{4.1}$$

ここで $\delta^{(3)}$ はディラックの δ 関数，またフーリエ展開は以下のように定義される．

$$\delta(\vec{k}) = \int \delta(\vec{x})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}d^3x \tag{4.2}$$

第 6 章で見るようにインフレーション理論の予言は

$$P(k) \propto k^{n_s}\ (n_s \simeq 1) \tag{4.3}$$

であるが，このような揺らぎは 1960 年代にすでに示唆されておりハリソン–ゼ

ルドビッチ (Harison–Zeldovich) スペクトルと呼ばれる.

この揺らぎの意味は，密度揺らぎに対応する質量揺らぎを考えることでよく分かる．第1章で見たように，質量の揺らぎは次のように書ける.

$$\left\langle \left(\frac{\delta M}{\bar{M}} \right)^2 \right\rangle_R \simeq \int_0^{1/R} P_M(k) \frac{k^2 dk}{2\pi^2} \propto k^{n_s+3} \tag{4.4}$$

揺らぎのスケールはその波数で指定される．波数の逆数は波長に比例するので波数が小さいほど波長が長い．揺らぎの振幅が小さい範囲では線形近似が有効で，異なる波数の揺らぎは独立に振舞う．したがって線形近似の範囲では，波数ごとに取り扱えばよい．インフレーション時に生成された任意の波数の揺らぎは光速度をはるかに超える速度で広がり宇宙の地平面を超えてしまう．地平面を超えた揺らぎを取り扱うには一般相対論的な摂動論を用いる必要があるが，結果は以下のような簡単な考察から理解することができる．宇宙は平均密度 $\bar{\rho}$ をもち平坦とする.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \bar{\rho} \tag{4.5}$$

その中に平均密度よりも $\bar{\rho}\delta$ だけ大きい球形の領域があるとしよう．この領域は周りの平坦な宇宙に比べて閉じた宇宙のような振舞いをする.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \bar{\rho}(1+\delta) - \frac{1}{a^2} \tag{4.6}$$

この2つの式から

$$\delta = \frac{3}{8\pi G} \frac{1}{a^2 \bar{\rho}} = \begin{cases} a^2 & \text{(放射優勢)} \\ a & \text{(物質優勢)} \end{cases} \tag{4.7}$$

こうして地平面を超える揺らぎは放射優勢期にはスケール因子の2乗，物質優勢期にはスケール因子に比例して成長することが分かる.

さてある波数，したがってある波長の揺らぎを考えると，この揺らぎは宇宙膨張とともに広がっていく．しかし宇宙膨張の速度はどんどん遅くなるため，この揺らぎ（の1波長）はいつかは地平面の中に取り込まれてしまう．揺らぎが地平面に取り込まれるときの質量を考えてみよう．地平面の半径は $R_H \propto t$ だから放射優勢時には $R_H \propto a^2$，物質優勢期には $R_H \propto a^{3/2}$ である．したがってこの大きさ以内の平均的な質量は $M_H \propto \bar{\rho}_m R_H^3$，より放射優勢期では $M_H \propto a^3$,

物質優勢期では $M_H \propto a^{3/2}$ となる．したがってそれぞれの時期における密度揺ゆらぎの時間発展を揺らぎの平均質量で表せば，どちらも $\delta \propto M_H^{2/3}$ となる．こうして密度揺らぎの時間発展と波数依存性は，$\delta \propto M_H^{2/3} k^{n_s/2}$ と書けて，質量揺らぎは

$$\left\langle \left(\frac{\delta M}{M}\right)^2 \right\rangle \propto M_H^{4/3} \int_0^{1/R_H} k^{n_s} \frac{k^2 dk}{2\pi^2}$$
$$\propto M_H^{4/3} M_H^{-(n_s+3)/3} \propto M_H^{(1-n_s)/3} \tag{4.8}$$

となる．ここで $R_H \propto M_H^{1/3}$ を用いた．質量揺らぎは波長の短い順に次から次へと地平面に取り込まれていく．したがって $n_s < 1$ なら後から地平面に取り込まれる大きな波長の揺らぎほど振幅が大きくなり，次から次へと大きな天体が形成されることになる．一方，$n_s > 1$ の場合，小さな波長の揺らぎほど大きな振幅をもつことになる．後に説明するように小波長の揺らぎは地平面に取り込まれた小さなブラックホールがごろごろできる宇宙になってしまうだろう．ハリソン–ゼルドビッチスペクトル（$n_s = 1$）は，この中間でどの揺らぎもちょうど地平面に取り込まれたとき平均質量が一定になっているという特別の構造をもっている．

以後の節で地平面に取り込まれた揺らぎの時間発展を見ていこう．その前にあるスケールの揺らぎが地平面に取り込まれる赤方偏移を導いておこう．まず等密度時（放射のエネルギー密度と物質のエネルギー密度が等しくなる時期）での共動ハッブル半径は第 2 章から

$$d_{\rm H}(z_{\rm eq}) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}H_0} \frac{1}{\Omega_{m,0}^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{1+z_{\rm eq}}} = \frac{1}{\sqrt{2}H_0} \frac{\Omega_{r,0}^{1/2}}{\Omega_{m,0}} \simeq 97 \text{ Mpc} \tag{4.9}$$

したがって現在の天体を形成する揺らぎは放射優勢期に地平面に取り込まれたことが分かる．

共動波長 λ_0 の揺らぎが地平面に取り込まれる条件は

$$\lambda_0 = \chi_H(z_{\rm enter}) \tag{4.10}$$

だから

$$\lambda_0 = \chi_H(z_{\rm enter}) \simeq \frac{1}{H_0 \Omega_{r,0}^{1/2}} \frac{1}{z} \tag{4.11}$$

したがって

$$z_{\rm enter} \simeq \frac{1}{H_0 \Omega_{r,0}^{1/2}} \frac{1}{\lambda_0} \simeq 4.6 \times 10^5 \left(\frac{\lambda_0}{1\,{\rm Mpc}} \right)^{-1} \tag{4.12}$$

問題： 物質優勢期に地平面に取り込まれる揺らぎに対して，そのときの赤方偏移を求めよ．

4.2 重力不安定成長

地平面に取り込まれた揺らぎは，重力や圧力という物理的な相互作用が働き始め，成長していく．しかしこの成長は宇宙が膨張していることによって強く影響を受ける．冷たい暗黒物質やバリオンを圧力のない流体（ダストという）とみなして膨張宇宙における密度揺らぎの成長を扱う．ただし揺らぎのスケールは宇宙の地平面よりも十分に小さいとする．このような場合，ニュートン的な取扱いがよい近似となる．

ニュートン重力のもとでの圧力が無視できる流体は，以下の 3 つの式で記述できる．

$$\dot{\rho}(t,\vec{r}) + \nabla_r \cdot [\rho \vec{u}(t,\vec{r})] = 0 \qquad \text{（連続の式）} \tag{4.13}$$

$$\rho \dot{\vec{u}} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla_r)\vec{u} + \nabla_r p + \rho \nabla_r \Phi = 0 \qquad \text{（オイラー方程式）} \tag{4.14}$$

$$\nabla_r^2 \Phi = 4\pi G \rho \qquad \text{（ポアッソン方程式）} \tag{4.15}$$

Φ はニュートンポテンシャルを表す．第 2 式以下では座標の依存性を省略したが，上の式ですべての物理量は座標 $(t,\vec{r})$ の関数である．この式を膨張宇宙に適用するために

$$\vec{r} = a(t)\vec{x} \tag{4.16}$$

として共動座標 $(t,\vec{x})$ で書き直す．

$$\nabla_r f(t,\vec{x}) = \left.\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right|_t f(t,\vec{r}/a(t)) = \frac{1}{a}\nabla_x\,|_t\, f(t,\vec{x}) \tag{4.17}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_r f(t,\vec{x}) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_x f(t,\vec{x}) - \frac{\dot{a}}{a}\vec{x} \cdot \nabla_x\,|_t\, f(t,\vec{x}) \tag{4.18}$$

に注意して計算すると，上の 3 つの式はそれぞれ以下のようになる．

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + \frac{1}{a}\nabla_x(\rho\vec{v}) = 0 \tag{4.19}$$

$$\ddot{a}\vec{x} + \dot{\vec{v}} + 2\frac{\dot{a}}{a}(\vec{v}\cdot\nabla_x)\vec{v} = -\frac{1}{a^2\rho}\nabla_x p - \frac{1}{a^2}\nabla_x\Phi \tag{4.20}$$

$$\nabla_x^2\Phi = 4\pi G\rho a^2 \tag{4.21}$$

上式の物理量はすべて共動座標 $(t,\vec{x})$ の関数である．ここで $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$ である．したがって

$$\vec{u} = H\vec{r} + a\dot{\vec{x}} = H\vec{r} + a\vec{v} \tag{4.22}$$

放射優勢期や宇宙定数優勢期にも適用するためには，第 3 式を以下のように拡張すればよい．

$$\nabla_x^2\Phi + \Lambda a^2 = 4\pi G\,(\rho + 3p)\,a^2 \tag{4.23}$$

超銀河団などの大きなスケールを除いては構造形成は宇宙定数優勢期にはほぼ完成しているので，ここでは宇宙定数は考慮しない．

ここで以下のように平均量とそれからのずれ（揺らぎ）を定義する．

$$\rho(t,\vec{x}) = \bar{\rho}(t) + \delta\rho(t,\vec{x}) = \bar{\rho}\,[\,1 + \delta(t,\vec{x})\,] \tag{4.24}$$

$$p(t,\vec{x}) = \bar{p}(t) + \delta p(t,\vec{x}) \tag{4.25}$$

$$\Phi(t,\vec{x}) = \bar{\Phi}(t,\vec{x}) + \phi(t,\vec{x}) \tag{4.26}$$

速度場 $\vec{v}$ の平均はゼロである．平均値の満たす式は以下で与えられる．

$$\dot{\bar{\rho}} + 3\frac{\dot{a}}{a}\bar{\rho} = 0 \tag{4.27}$$

$$\ddot{a}\vec{x} = -\frac{1}{a}\nabla_x\bar{\Phi} \tag{4.28}$$

$$\nabla_x^2\bar{\Phi} = 4\pi G\,(\bar{\rho} + 3\bar{p})\,a^2 \tag{4.29}$$

ここで $\bar{\Phi} = -\ddot{a}ax^2/2$ である．第 1 式から

$$\bar{\rho} \propto a^{-3} \tag{4.30}$$

第 2 式の発散をとって，第 3 式に代入すると

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\,(\,\bar{\rho} + 3\bar{p}) \tag{4.31}$$

となって第 2 章で導出したフリードマン方程式（宇宙定数なし）が導かれる．

この平均部分を引くと以下の揺らぎに対する方程式が得られる.

$$\dot{\delta} + \nabla_x \cdot [(1+\delta)\,\vec{v}] = 0 \tag{4.32}$$

$$\dot{\vec{v}} + 2\frac{\dot{a}}{a}\vec{v} + (\vec{v}\cdot\nabla_x)\,\vec{v} = -\frac{1}{a^2\bar{\rho}(1+\delta)}\nabla_x\delta p - \frac{1}{a^2}\nabla_x\phi \tag{4.33}$$

$$\nabla_x^2\phi = 4\pi G\bar{\rho}a^2\delta \tag{4.34}$$

ただし今考えているのは非相対論的な物質では圧力の揺らぎは密度揺らぎに対して十分小さいので，ポアッソン方程式の右辺で圧力の揺らぎは無視した.

4.2.1 線形近似とジーンズ不安定性

揺らぎの振幅が十分小さい場合，揺らぎの 2 次以上の量は無視することができる．この近似を線形近似という．宇宙の晴れ上がりの時点で暗黒物質の密度揺らぎは，1000 分の 1 程度，バリオン物質の揺らぎは 10 万分の 1 程度であるから，この近似は十分よい精度で成り立っている．しかし赤方偏移が 10，あるいはそれ以前に最初の天体が形成されたと考えられているので，そのときには非線形性が重要な役割を果たす.

揺らぎの 2 次以上を無視した線形近似の方程式は以下のようになる.

$$\dot{\delta} + \nabla_x \cdot \vec{v} = 0 \tag{4.35}$$

$$\dot{\vec{v}} + 2H\vec{v} = -\frac{1}{a^2\bar{\rho}}\nabla_x\delta p - \frac{1}{a^2}\nabla_x\phi \tag{4.36}$$

$$\nabla_x^2\phi = 4\pi G\bar{\rho}a^2\delta \tag{4.37}$$

第 1 式を時間微分し，第 2 式の発散をとるなどして以上の式を組み合わせると以下の式が得られる.

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\bar{\rho}(t)\delta - \frac{1}{a^2}c_s^2\nabla_x^2\delta = 0 \tag{4.38}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{v} + 2\frac{\dot{a}}{a}\nabla\times\vec{v} = 0 \tag{4.39}$$

第 1 式で c_s は次式で定義される音速である.

$$c_s^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial\rho}\right|_S \tag{4.40}$$

ただし右辺はエントロピー S を一定に保ったときの密度変化に対する圧力の変化である．したがって，ここで考えるエントロピー変化がない断熱的な状況で

は，$\delta p = c_s^2 \bar{\rho}\delta$ と書ける．

また第 2 式から

$$\nabla \times \vec{v} \propto \frac{1}{a} \tag{4.41}$$

となり速度場の回転成分は減衰する．あるいは第 2 式から初期に速度場の回転成分をゼロとしておけば，線形近似の範囲ではゼロのままなので，以下，速度場の回転成分を無視する．したがって速度場の独立成分は 1 つだけとなり，速度場の発散 $\theta = \nabla \cdot \vec{v}$，あるいは $\vec{v} = -\nabla\psi$ として速度ポテンシャル ψ で表される．

$$\dot{\theta} + 2H\theta + \frac{3}{2}\Omega_{m,0}H^2\delta = -\frac{1}{a^2\bar{\rho}}\nabla_x^2\delta p \tag{4.42}$$

ここでフリードマン方程式

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho} \tag{4.43}$$

を用いた．

線形理論では揺らぎの各フーリエ成分は独立に振舞うので，座標空間ではなくフーリエ変換した波数空間で考えると物理的に考えやすい．フーリエ変換は

$$\delta(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\delta(t,\vec{k})d^3k \tag{4.44}$$

共動波数 $\vec{k}$ に対応する共動波長は

$$\lambda = \frac{2\pi}{|k|} \tag{4.45}$$

で与えられる．波数空間での線形化した密度揺らぎの方程式は以下のようになる．

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \left(4\pi G\bar{\rho}(t) - \frac{k^2c_s^2}{a^2}\right)\delta = 0 \tag{4.46}$$

ここで $\bar{\rho}$ は宇宙の平均密度，$c_s \simeq 1/\sqrt{3}$ は光子・バリオン流体の音速である（第 3 章参照）．

$$c_s^2 = \frac{dP}{d\rho} = \frac{d(P_r)}{d(\rho_b + \rho_r)} = \frac{d(1/3\rho_r)}{d(\rho_b + \rho_r)} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+R} \tag{4.47}$$

ここで

$$4\pi G\bar{\rho} = \frac{k_{\mathrm{J}}^2c_s^2}{a^2} \tag{4.48}$$

として波数 k_J を定義すると，上式は

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \left(k_{\rm J}^2 - k^2\right)\frac{c_s^2}{a^2}\delta = 0 \tag{4.49}$$

したがって $k < k_{\rm J}$ を満たす揺らぎは重力的に成長し，一方，$k > k_{\rm J}$ を満たす揺らぎは圧力勾配の影響が強く成長できず音波として振動することが分かる．これは次のように考えれば納得できる．中心で密度が上がるとその影響は圧力の波となって音速で伝わる．考えている径の大きさを，L とすれば音速が伝わる時間は，L/c_s 程度である．一方，系の質量を M とし，圧力の影響がなければ，この系は自由落下の速度 $\sqrt{2GM/L}$ でつぶれるだろう．したがってつぶれる時間は $1/\sqrt{\pi G\bar{\rho}}$ 程度となる．系がつぶれるためには自由落下時間が圧力が伝わる時間よりも短くなければならない．$k < k_{\rm J}$ というのは，この条件に対応する．これから分かるように $\bar{\rho}$ は重力的に最も重要な成分のエネルギー密度，音速は考えている系の圧力に寄与する成分のそれである．したがって両者が同じ成分の量である必要はない．

この $k_{\rm J}$ をジーンズ波数，対応する波長

$$a\lambda_{\rm J} \equiv \frac{2\pi a}{k_{\rm J}} = c_s\left(\frac{\pi}{G\rho}\right)^{1/2} \tag{4.50}$$

をジーンズ波長という．またジーンズ波長を直径とする球内に含まれる質量をジーンズ質量という．

$$M_{\rm J} \equiv \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\lambda_{\rm J}}{2}\right)^3\rho = \frac{\pi^{5/2}}{6}\rho\left(\frac{c_s}{\sqrt{G\bar{\rho}}}\right)^3 \tag{4.51}$$

ここで ρ は考えている物質の密度で，重力の強さを決めている $\bar{\rho}$ とは違ってもよい．暗黒物質の揺らぎを考える場合には，$\rho = \bar{\rho} = \rho_{\rm CDM}$ となって

$$M_{\rm J,CDM} = \frac{\pi^{5/2}}{6}\frac{c_s^3}{\sqrt{G^3\rho_{\rm CDM}}} \tag{4.52}$$

となる．

4.3 冷たい暗黒物質揺らぎの成長

宇宙の晴れ上がりまではバリオン物質の密度揺らぎは，圧倒的な放射の圧力によって抑圧されて成長できない．しかし暗黒物質は物質優勢になるや否や成長を始め，宇宙の晴れ上がりまでにバリオン物質の密度揺らぎの成長を準備する．以下このことを見てみよう．

4.3.1 線形成長因子とスタグスパンション

冷たい暗黒物質では圧力を無視することができるから密度揺らぎの式は以下のようになる.

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\bar{\rho}(t)\delta = 0 \tag{4.53}$$

放射優勢時から物質優勢時にかけての密度揺らぎの成長を見るために時間座標として

$$\eta = \frac{a}{a_{\rm eq}} = \frac{\rho_m}{\rho_\gamma} \tag{4.54}$$

をとって上の式を書き換えてみよう.

$$\frac{d}{dt} = \frac{da}{dt}\frac{d}{da} = \frac{\dot{a}}{a}a\frac{d}{da} = \frac{\dot{a}}{a}\eta\frac{d}{d\eta} \tag{4.55}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\dot{a}^2}{a^2}\eta^2\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{\ddot{a}}{a}\eta\frac{d}{\eta} \tag{4.56}$$

フリードマン方程式

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_m + \rho_\gamma\right) \tag{4.57}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho_m + 2\rho_\gamma\right) \tag{4.58}$$

を使うと上式は

$$2\eta(1+\eta)\frac{d^2\delta}{d\eta^2} + (2+3\eta)\frac{d\delta}{d\eta} = 3\delta \tag{4.59}$$

となる. この式で左辺第 1 項を無視すると

$$\delta_g = 1 + \frac{3}{2}\eta \tag{4.60}$$

という解が得られるが, 代入すれば容易に分かるようにこの解はもとの方程式の解にもなっている. したがってこれは 2 階微分方程式の 1 つの解であり, 時間とともに増大するので成長解と呼ばれる. もう 1 つの解は, ロンスキー行列

$$W(\eta\eta') = \dot{\delta}(\eta)\delta(\eta') - \delta(\eta)\dot{\delta}(\eta') \tag{4.61}$$

が従う方程式から計算することができる.

$$\frac{dW}{d\eta} - \frac{2+3\eta}{2\eta(1+\eta)}W = 0 \tag{4.62}$$

から $\delta_d(\eta) = f(\eta)\delta_g(\eta)$ とおくと,

$$\frac{f''}{f} = -\frac{2\delta_g}{\delta_g} - \frac{2+3\eta}{2\eta(1+\eta)} \tag{4.63}$$

となり，次のように計算される．

$$\delta_d \propto \left(1+\frac{3}{2}\eta\right)\ln\left[\frac{(1+\eta)^{1/2}+1}{(1+\eta)^{1/2}-1}\right] - 3(1+\eta)^{1/2} \tag{4.64}$$

こうして等密度期の前後で暗黒物質の密度揺らぎは次のように求められる．

$$\begin{aligned}\delta_{\rm DM}(\eta) &= A\delta_g(\eta) + B\delta_d(\eta) \\ &= \begin{cases} A + B\ln(4/\eta) & (a \ll a_{\rm eq}) \\ \frac{3}{2}A + \frac{4}{5}B\eta^{-3/2} & (a \gg a_{\rm eq}) \end{cases}\end{aligned} \tag{4.65}$$

これから暗黒物質の密度揺らぎは放射優勢期には対数関数的にしか成長できないが，物質優勢期にはスケール因子に比例して成長することが分かる．放射優勢期の膨張による成長の停滞を，スタグスパンション（stagspansion）という．

とくに物質優勢期における密度揺らぎの方程式は一般的に次の 2 つの解をもつ．

$$D_-(a) \propto H(a) \tag{4.66}$$

$$D_+(a) \propto H(a)\int_0^a \frac{da'}{a'^3 H^3(a')} \tag{4.67}$$

$H(a)$ は時間の減少関数だから，D_- を減衰解，あるいは減衰因子という．一方，$D_+(a)$ は増加関数であるので成長解，あるいは成長因子という．アインシュタイン–ド・ジッター宇宙（$K = \Lambda = 0$）のとき，$D_+(a) \propto a$ である．具体的には

$$D_+(a) = \frac{5}{2}a\Omega_M(a)\int_0^1 \frac{dx}{(\Omega(a)/x + \Omega_\Lambda(a)x^2)^{3/2}} \tag{4.68}$$

ここで積分の前の係数は，a が十分小さいときには曲率も宇宙定数の影響も無視できるので $a \to 0$ で $D(a) = a$ となるように決めた．この解について次の近似式が知られている．

$$D_+(a) \simeq \frac{5}{2}a\Omega_m(a)\left[\Omega_\Lambda(a) + \left(1+\frac{1}{2}\Omega_m(a)\right)\left(1+\frac{1}{70}\Omega_\Lambda(a)\right)\right] \tag{4.69}$$

宇宙定数があるとない場合に比べて成長が妨げられる．この様子を図 4.1 に示した．

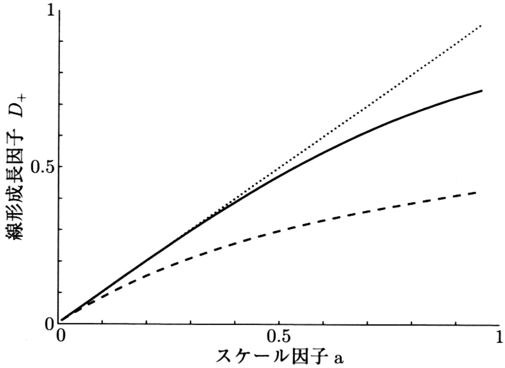


図 4.1 線形成長因子 D_+ のスケール因子依存性
上から順に，$(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0}, \Omega_K) = (1, 0, 0), (0.27, 0.73, 0), (0.27, 0, 0.73)$ の宇宙論パラメータの場合.

4.3.2 熱い暗黒物質のフリーストリーミング

暗黒物質は無衝突粒子系であるから自由運動によってあるスケールの密度揺らぎが消されてしまう．これをフリーストリーミング（free streaming）という．この効果が顕著に現れるのは，ほぼ光速度で運動するニュートリノのような熱い暗黒物質である．このスケールは DM 粒子の速度が非相対論的になるまでの間に進んだ距離で大まかに評価される．ニュートリノの質量を m_ν として，非相対論的になる温度は，ニュートリノの平均エネルギー

$$\langle E \rangle = \frac{7\pi^4}{180\zeta(3)} T_\nu \simeq 3.15 T_\nu \tag{4.70}$$

がその質量と等しくなる温度とすると

$$T_\nu^{\rm nr} = \frac{180\zeta(3)}{7\pi^4} m_\nu \simeq 3180 \left(\frac{m_\nu}{1\,{\rm eV}}\right) {\rm K} \tag{4.71}$$

このときの赤方偏移は

$$1 + z_{\rm nr} \simeq 1890 \left(\frac{m_\nu}{1\,{\rm eV}}\right) \tag{4.72}$$

第 3 章で述べたようにニュートリノの質量に対しては，すでに 0.3 eV 以下ということが分かっているから，非相対論的になるのは物質優勢期である．したがって非相対論的になる（共動）波数を，そのときのハッブル半径とすると

$$k_{\rm nr} = \frac{H(z_{\rm nr})}{1 + z_{\rm nr}} = \frac{\Omega_{m,0}^{1/2} h (1 + z_{\rm nr})^{1/2}}{2998\,{\rm Mpc}} \simeq 0.0145 \left(\frac{m_\nu}{1\,{\rm eV}}\right)^{1/2} \Omega_{m,0}^{1/2} h \ {\rm Mpc}^{-1} \tag{4.73}$$

となる．ここで物質優勢期のフリードマン方程式を用いた．

問題： 波数がこのように書けることを示せ．

上式はニュートリノ速度として光速度 $c=1$ を使っているが，正確にはニュートリノの速度分散を使わなければならず，1 桁ほど小さくなる．

$$k_{\mathrm{fs}} \simeq \frac{0.677}{(1+z)^{1/2}}\left(\frac{m_\nu}{1\,\mathrm{eV}}\right)(\Omega_{m,0}h^2)^{1/2}\ \mathrm{Mpc}^{-1} \tag{4.74}$$

対応する現在のスケールは

$$L_{\mathrm{fs}} \equiv \frac{2\pi}{k_{\mathrm{fs}}} \simeq 9.3\left(\frac{m_\nu}{1\,\mathrm{eV}}\right)^{-1/2}(\Omega_{m,0}h^2)^{-1/2} \simeq 25\left(\frac{m_\nu}{1\,\mathrm{eV}}\right)^{-1/2}\ \mathrm{Mpc} \tag{4.75}$$

となる．対応する質量は

$$M_{\mathrm{fs}} \simeq \frac{4\pi L_{\mathrm{fs}}^3}{3}\Omega_{m,0}\rho_{\mathrm{cr},0} \simeq 10^{16}M_\odot\left(\frac{m}{1\,\mathrm{eV}}\right)^{-2} \tag{4.76}$$

この質量以下のニュートリノがつくるハローは，フリーストリーミングのために消されてしまう．したがってもし熱い暗黒物質が暗黒物質の主要な成分だとすると，このスケール以下の暗黒物質ハローは存在せず，したがって最初にできる天体は非常に大きなスケールとなる．その後，分裂を繰り返して小さな天体ができていくことになる．このような構造形成のシナリオをトップ・ダウンシナリオという．しかし赤方偏移 6 以上の初期に多くの原始銀河が観測されている．このことから，まず小さな天体ができて，それがお互いの重力で引き付けあって集まり，大きなスケールの天体（銀河団，超銀河団）が形成されると考えられている．このような構造形成のシナリオをボトム・アップシナリオという．冷たい暗黒物質の場合，宇宙の十分初期にすでに非相対論的になっているのでフリーストリーミングのスケールは無視できるほど小さく，後で述べるように初期の物質密度揺らぎの性質から小さい天体がまず形成される．こうして暗黒物質の主要な成分は冷たい暗黒物質である．

4.3.3 遷移関数・パワースペクトルの変化

上で見たように放射地平面に取り込まれた暗黒物質の揺らぎは，物質優勢期になるまでは成長できない．地平面を超える揺らぎはスケール因子の 2 乗に比例して成長するが，波長の短い揺らぎは先に地平面に取り込まれるため，等密

度時まで成長が妨げられる．こうして地平面に取り込まれたときは同じ質量揺らぎをもっていたスペクトルは地平面に取り込まれると，波数によってその形を変化させることになる．この変化を記述する関数を遷移関数という．遷移関数 $T(k)$ は以下のように定義される．

$$\delta(a=1) = T(k)\frac{D(t)}{D(t_\mathrm{i})}\delta_\mathrm{i} \tag{4.77}$$

ここで $D(t)$ は上で定義した線形の成長因子，t_i は揺らぎの初期時刻である．この遷移関数を評価してみよう．ただし熱い暗黒物質の寄与は小さいので，ここでは無視する．上で見たように放射優勢期に地平面に取り込まれた揺らぎの波数を k とすると，$a_\mathrm{enter} \propto k^{-1}$ であり，地平面に取り込まれるまではスケール因子の 2 乗で成長していたから

$$\delta(\vec{k}, a=1) \propto a_\mathrm{enter}^2 \delta(\vec{k}, t_\mathrm{i}) \propto k^{-2}\delta(\vec{k}, t_\mathrm{i}), \quad k \gg k_\mathrm{eq} \tag{4.78}$$

ここで k_eq は等密度時の共動ハッブル半径に対応する波数である．

$$k_\mathrm{eq} = \frac{1}{d_\mathrm{H}(t_\mathrm{eq})} = H(z_\mathrm{eq}) \simeq 0.102\,\Omega_{m,0}h \quad [h\mathrm{Mpc}^{-1}] \tag{4.79}$$

一方，物質優勢期に地平面に取り込まれた揺らぎは，地平面の内側でも外側でも同じように成長するのでスペクトルは変化しない．こうして遷移関数は，等密度時の地平面半径に対応する波長付近で折れ曲がるような振舞いをする．

$$T(k) = \begin{cases} k^{-2} & (k \gg k_\mathrm{eq}) \\ 1 & (k \ll k_\mathrm{eq}) \end{cases} \tag{4.80}$$

したがってパワースペクトルの波数依存性は

$$P(k) \propto |\delta(k, a=1)|^2 \propto \begin{cases} k^{n_s-4} & (k \gg k_\mathrm{eq}) \\ k^{n_s} & (k \ll k_\mathrm{eq}) \end{cases} \tag{4.81}$$

となる．

より正確な計算によると，遷移関数の波数依存性は次式でよく近似できることが知られている．

$$\begin{aligned} &T(q \equiv k/\Gamma h\,\mathrm{Mpc}^{-1}) \\ &\quad = \frac{\ln[1+2.34q]}{2.34q}\left[1+3.89q+(16.2q)^2+(5.47q)^3+(6.71q)^4\right]^{-0.25} \end{aligned}$$

ここで $\Gamma = \Omega_{m,0}h$ である．ただし，この式にはニュートリノの効果やバリオン・光子流体の振動の影響などは含まれていない．

ニュートリノのパワースペクトルへの影響

ニュートリノ振動の発見によってニュートリノが質量をもつことが確かになった．ニュートリノが質量をもつと，フリーストリーミングによってパワースペクトルが変形する．ニュートリノの揺らぎが存在し得るのはフリーストリーミング以上のスケールである．フリーストリーミング以下のスケールでは冷たい暗黒物質の揺らぎだけが存在するのに対して，それ以上のスケールでは冷たい暗黒物質とニュートリノの揺らぎが存在することになり，その分重力が強くなる．したがってフリーストリーミング以下の揺らぎの成長はそれ以上のスケールの揺らぎの成長に比べて遅くなる．この成長の遅れは全質量に対するニュートリノの割合

$$f_\nu \equiv \frac{\Omega_{\nu,0}}{\Omega_{m,0}} = 0.05 \left(\frac{N_\nu^{\mathrm{nr}} m_\nu}{0.658\,\mathrm{eV}}\right)\left(\frac{0.14}{\Omega_{m,0}h^2}\right) \tag{4.82}$$

を用いて以下の近似式で与えられることが知られている．ただし N_ν^{nr} は 3 種類のニュートリノのうち非相対論的なニュートリノ数である．

$$\frac{D(k \gg k_{\mathrm{fs}}, z)}{D(z)} = (1 - f_\nu)D(z)^{-p} \tag{4.83}$$

ここで $p = (5 - \sqrt{25 - 24f_\nu})/4$，$D(k)$ は線形成長の成長因子である．パワースペクトルの変化は，$k \gg k_{\mathrm{fs}}$ で

$$\frac{\Delta P}{P} \simeq 8f_\nu \tag{4.84}$$

となる．こうしてパワースペクトルの観測から，非相対論的なニュートリノの数や質量について制限を得ることができる．

4.3.4 暗黒物質の非線形成長とハローの形成

暗黒物質の密度揺らぎが，だんだん成長するともはや線形近似が適用できず，重力の非線形性の影響が大きくなる．線形成長の段階では宇宙膨張と同じように膨張していた領域も，揺らぎが成長し自己重力が強くなると膨張速度がだんだん遅くなりついには止まり，そして収縮し始める．最終的に平衡状態に落ち着き，その中にバリオン物質を取り込むハローをつくる．実際の宇宙で起こって

いるこの暗黒ハローの形成を解析的に扱うのは不可能に近く，シミュレーションで研究されている．ここでは暗黒ハローの形成を球対称性を仮定して，解析的に取り扱う．この仮定はもちろん実際には満たされないが，ハロー形成の定性的な理解には十分である．

今，宇宙定数のない平坦な宇宙の中にある時刻 $t_i = 0$ で半径 R_i の領域を考える．第 2 章で見たように密度パラメータの赤方偏移依存性を考えると背景時空のこの仮定は，赤方偏移が 1 程度から 1000 程度までは十分よい近似である．この領域内では密度が周りよりも $1 + \delta_i > 1$ だけ大きいとする．ただしこの領域内の密度は一様とする．するとこの領域の境界にある粒子は次のニュートン力学の式に従って運動する．

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{GM_R}{R^2} \tag{4.85}$$

ここで M_R は半径 R 以内の質量で定数である．

$$M = \frac{4\pi R_i^3}{3}\bar{\rho}_i(1 + \delta_i) \tag{4.86}$$

ただし $\bar{\rho}_i$ は考えている領域周りの時刻 t_i における密度である．この解は，次のようにパラメータ $0 \le \theta \le 2\pi$ を使って表される．

$$\begin{aligned} R(\theta) &= A\,(1 - \cos\theta) \\ t(\theta) &= B\,(\theta - \sin\theta) \end{aligned} \tag{4.87}$$

ただし $A^3 = GMB$ である．初期時刻に十分近く（$\theta \ll 1$）密度揺らぎが十分小さいときには線形理論を再現する．実際，考えている領域の周りは平坦な宇宙だから

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho} \tag{4.88}$$

この式から密度は

$$\bar{\rho} = \frac{1}{6\pi G t^2} \tag{4.89}$$

と得られる．したがって密度揺らぎは

$$\delta = \frac{\rho}{\bar{\rho}} - 1 = \frac{9GMt^2}{2R^3} - 1 \tag{4.90}$$

この式に R と t の式で θ について 4 次まで展開した式を代入すると

$$\delta = \frac{3}{20}\theta^2 = \frac{3}{20A}\left(6\sqrt{GM}\right)^{2/3} \tag{4.91}$$

が得られる．こうして確かに，$\delta \propto t^{2/3} \propto a$ となる．

さてこの領域の半径は $\theta = \pi$ で最大値 $2A$ となり，$\theta = 2\pi$ で $R = 0$ となる．領域が最大になる時刻 $t = \pi B(\theta = \pi)$ を転回点というが，このときの領域内の密度と周りの密度 $\bar{\rho}(\theta = \pi)$ を比べると

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} = \frac{M/(1/(4\pi(2A)^3/3))}{1/(6\pi G(\pi B)^2)} = \frac{9\pi^2}{16} \simeq 5.55 \tag{4.92}$$

となる．これを境に領域は収縮し始め，数式の上では $\theta = 2\pi$ で 1 点にまで縮んでしまう．もちろん実際にはそのようなことはなく，暗黒物質粒子のランダムな速度によって重力と釣り合うビリアル平衡状態に落ち着くと考えられる．このときの半径は以下のようにして求められる．運動方程式の積分から

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 - \frac{GM}{R} = E = -\frac{GM}{R_{\rm max}} \tag{4.93}$$

ここで転回点での半径を $R_{\rm max} = 2A$，そのとき運動エネルギーはゼロになることを使った．ビリアル平衡では，運動エネルギー $T = 1/2\dot{R}^2$ とポテンシャルエネルギー $U = -GM/R$ の間には，$2T = -U$ の関係があるから

$$E = T + U = -\frac{GM}{R_t} \tag{4.94}$$

これを使うと $R_{\rm vir} = R_{\rm max}/2$ となる．

$$\frac{\rho(2t_{\rm max})}{\bar{\rho}(2t_{\rm max})} = \frac{9\pi^2}{16} \times 2^3 \times 2^2 = 18\pi^2 \simeq 177 \tag{4.95}$$

したがってビリアル平衡に落ち着いたハローの密度は平均密度の 177 倍程度であることが分かる．これから赤方偏移 z が十分大きいときにできた質量 M のハローのビリアル半径が次のように評価される．

$$r_{\rm vir} \simeq 0.8\left(\frac{M}{10^8 M_\odot}\right)^{1/3}\left(\frac{10}{1+z}\right)h^{-2/3}\,{\rm kpc} \tag{4.96}$$

このハローの中にバリオンガスが落ち込んで平衡になったとしたときの温度（ビリアル温度）は

$$T_{\rm vir} \equiv \frac{\mu m_p V_c^2}{2k_{\rm B}} \simeq 2\times 10^4\left(\frac{\mu}{0.6}\right)\left(\frac{M}{10^8 M_\odot}\right)^{2/3}\left(\frac{1+z}{10}\right)h^{1/3}\,{\rm K} \tag{4.97}$$

ここで $V_p = \sqrt{GM/r_{\rm vir}}$ は質量 M と半径 $r_{\rm vir}$ に対応する回転速度，μ は宇宙初期のガス（重量比で水素 75 %，ヘリウム 25 %）の平均分子量で，中性ガスで $\mu = 1.22$，水素もヘリウムも完全電離した場合は $\mu = 0.59$ である．

以下，重要になる概念としてビリアル平衡になった時点で，密度揺らぎが線形成長をしていたときの値がある．ビリアル平衡になった時刻 $t_{\rm vir}$ は

$$t_{\rm vir} = 2\pi B = \frac{2\pi A^{3/2}}{\sqrt{GM}} \tag{4.98}$$

であるから，上で求めたこれを線形近似の式に代入すれば，

$$\delta_L(t_{\rm vir}) = \frac{3}{20}(12\pi)^{2/3} \simeq 1.69 \tag{4.99}$$

となる．ちなみに転回点での線形揺らぎの値は，同様の計算をすれば，$\delta_L(t_{\rm max}) \simeq 1.06$ となる．

次に暗黒物質ハローの質量分布を求めてみよう．ある質量スケール M で平均化された密度揺らぎの場 $\delta_M(x)$ を考える．この質量に対応する半径を R とすると，この場では R よりも小さな領域では一様である．第 1 章で見たように密度揺らぎがガウス的だとすると，この場の確率分布，すなわち密度揺らぎが δ_M から $\delta_M + d\delta_M$ の間にある確率は以下のようなガウス分布で表される．

$$p(\delta_M)d\delta_M = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(M)}} \exp\left(-\frac{\delta_M^2}{2\sigma^2(M)}\right) d\delta_M \tag{4.100}$$

ここで $\sigma(M)$ は，以下で定義される質量スケール M で平均化された密度揺らぎの分散である．

$$\sigma^2(M) = \int |\delta_k|^2 W_k^2(R) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{4.101}$$

ここで $W_k(R)$ は質量スケール M に対応する距離 R に対応する窓関数である．

プレス–シェヒター理論

さて密度揺らぎの中で天体を形成するのは，ある臨界値を超えた密度揺らぎであろう．そこでこの臨界値は上で与えた値とする．すなわち球対称崩壊によってビリアル平衡になった暗黒物質ハローの密度に対応する線形揺らぎ $\delta_{\rm crit}$ とするのである．すると赤方偏移 z で暗黒物質ハローをつくる密度揺らぎの確率分布は次式で与えられる．

$$p(>\delta_{\rm c}, z) = \int_{\delta_{\rm c}}^{\infty} p(\delta_M, z) d\delta_M \tag{4.102}$$

赤方偏移依存性は，$\sigma(M,z)=\sigma(R)D(z)$ として入れた．$D(z)$ は線形成長因子である．

ここでこの確率の 2 倍を，質量 M よりも大きな質量をもった暗黒物質ハローの質量の割合と仮定する．2 倍をかけたのは，以下の事情による．今，質量 0 の極限，すなわちすべての質量がハローに取り込まれる状況を考えよう．するとパワースペクトルが波数とともに急激に落ちないかぎり $\sigma(M)\to\infty$ となるから，この極限で $p(>\delta_{\rm c}, z)=1/2$ となる．これは暗黒物質の半分しかハローをつくらないということである．実際には密度揺らぎが負の領域であってもより大きなスケールで平均すれば臨界値を超える密度揺らぎになってハローをつくる場合がある．上の確率をハローの質量の確率とみなすためには，このことを考慮して 2 倍をかけなければならないのである．この確率関数からハローの数密度を求める以下の処方をプレス–シェヒター理論という．

こうして赤方偏移 z において質量が M より大きなハローの質量の割合を次のように書くことができる．

$$f(>M,z) = 2\int_{\delta_{\rm c}}^{\infty} p(\delta_M, z) d\delta_M = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\delta_{\rm c}/\sqrt{2}\sigma(M)}^{\infty} e^{-x^2} dx \tag{4.103}$$

上式を質量で微分して 質量間隔 dM とハローの平均の数密度 ρ_m/M をかければ，質量 M から $M+dM$ の間の質量をもった暗黒物質の数密度が得られる．

$$\begin{aligned} n(M,z)dM &= \frac{\bar{\rho}_m}{M}\frac{\partial f(>M,z)}{\partial M}dM = 2\frac{\bar{\rho}_m}{M}\frac{\partial p(>\delta_{\rm c},z)}{\partial \sigma}\left|\frac{d\sigma}{dM}\right| dM \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\bar{\rho}_m}{M^2}\left|\frac{d\ln\sigma(M,z)}{d\ln M}\right|\nu_{\rm c}\exp\left(-\nu_{\rm c}^2\right) \end{aligned} \tag{4.104}$$

ここで $\nu_{\rm c}=\delta_{\rm c}/\sqrt{2}\sigma(M)$ は平均からの標準偏差である．この表式から

$$\sqrt{2}\sigma(M_c(z), z) = \delta_{\rm c} = 1.69 \tag{4.105}$$

と定義すれば，$M>M_c(z)$ をもったハローは急激につくられなくなることが分かる．$D(z)$ は線形成長因子である．$\sigma(M)$ は質量の減少関数だから赤方偏移が小さくなるほど（時間がたてばたつほど）大きな質量のハローができる．

もう少し見やすい形にするためにパワースペクトルを，$P(k)\propto k^n$ と仮定し

よう．このとき分散は，A を定数として以下のようになる．

$$\sigma^2(M) = AM^{-(n+3)/3} \tag{4.106}$$

すると上で定義した基準となる質量は以下のように書ける．

$$M_c(z) = \left(\frac{2AD^2}{\delta_c^2}\right)^{1/\gamma} \tag{4.107}$$

ここで $\gamma = 1 + n/3$ である．物質優勢とすると $D \propto a(t)$ だから，M_c の時間依存性は，$M_c \propto D^{2/\gamma} \propto a^{2/\gamma}$ となり

$$M_c(z) = M_{c,0}(1+z)^{-2/\gamma} \tag{4.108}$$

と書ける．ここで $M_{c,0}$ が現在の値である．これを用いるとハローの数密度は次のように書けることが分かる．

$$n(M,z)dM = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\gamma\bar{\rho}_m}{M^2}\left(\frac{M}{M_c(z)}\right)^{\gamma/2}\exp\left[-\left(\frac{M}{M_c(z)}\right)^{\gamma}\right] \tag{4.109}$$

現在では暗黒ハローの形成やそれに引き続くバリオンの成長，銀河形成は，大規模な数値シミュレーションで行われている．プレス–シェヒター理論は，球対称崩壊や確率を出すために因子 2 をかけるなど様々な簡単化を行って得られた近似である．比較的数値計算の結果と合うことが知られているが，正確な評価は期待できない．非球対称崩壊などのより一般的な仮定のもとで数値計算の結果を再現するような表式も知られている．図 4.2 にはそのような表式によって計算された暗黒物質ハローの数密度の変化を示す．この図から過去に行けばいくほど質量の小さなハローしかできないことが分かる．

4.3.5　バリオン密度揺らぎの成長と銀河形成

ビッグバンから約 38 万年後，宇宙が晴れ上がってから最初の天体が形成されるまで宇宙には可視光は存在せず，もしその時代に観測者がいたとすれば全くの暗闇であった．これを宇宙の暗黒時代と呼んでいる．しかし宇宙の晴れ上がりの時点で暗黒物質はすでに 1000 分の 1 程度の密度揺らぎに達していてその後も成長を続け，上で見たように大小様々なスケールの塊（暗黒物質ハロー）へと成長しいていた．一方，バリオン物質の密度揺らぎは，宇宙が晴れ上がると同時に暗黒物質のハローに引き付けられ，その中心部で急速に成長していっ

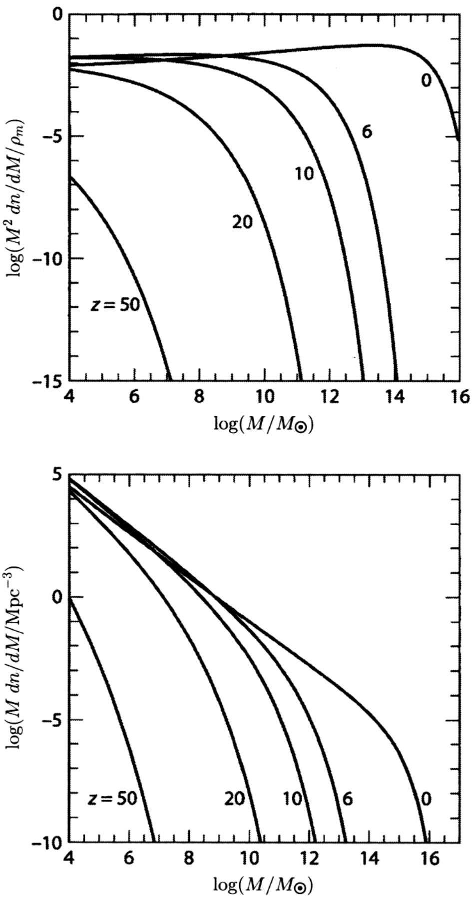


図 4.2 質量の関数としての暗黒物質ハローの数密度の時間変化
[A. Loeb and S. R. Furlanetto, "The First Galaxies in the Universe", Princeton University Press, 2012]

た．そしてその中で宇宙で最初の大質量の星が生まれる．これらの星は 200 万〜300 万年ほどで超新星爆発を起こし，次の星形成の引き金を引く．そして銀河へと成長する．この時代の詳細は複雑な物理過程を含み，また観測に乏しく完全に解明されてはいない宇宙論の最先端の分野である．ここではその大まかな筋書きを述べることにする．詳細は巻末にあげる文献を参照してほしい．

暗黒物質とバリオン物質の密度揺らぎを，それぞれ $\delta_{\rm DM}$，$\delta_{\rm b}$ と書くと，それ

らは以下の方程式を満たす.

$$\ddot{\delta}_{\rm DM} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{\rm DM} = 4\pi G\left(\bar{\rho}_{\rm DM}\delta_{\rm DM} + \bar{\rho}_b\delta_b\right)$$
$$\ddot{\delta}_{\rm b} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{\rm b} = 4\pi G\left(\bar{\rho}_{\rm DM}\delta_{\rm DM} + \bar{\rho}_b\delta_b\right) \tag{4.110}$$

これらの式の左辺は, $\rho_{\rm tot} = \rho_{\rm DM} + \rho_b$ と書くと $\rho_{\rm tot} - \bar{\rho}_{\rm total}$ を密度揺らぎの1次まで展開して得られ, 暗黒物質とバリオン物質の重力相互作用を表している. この2式を引き算すれば,

$$\left(\ddot{\delta}_{\rm DM} - \ddot{\delta}_{\rm b}\right) + 2\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\delta}_{\rm DM} - \dot{\delta}_{\rm b}\right) = 0 \tag{4.111}$$

となる. 物質優勢期 $a \propto t^{2/3}$ で宇宙の晴れ上がり時 $t_{\rm rec}$ を初期時刻として $\dot{\delta}_{\rm b}(t_{\rm rec}) = 0$ の条件のもとに解けば

$$\delta_{\rm b}(t) - \delta_{\rm DM}(t) = \delta_{\rm b}(t_{\rm rec}) - 3\delta_{\rm DM}(t_{\rm rec}) + 2\delta_{\rm DM}(t_{\rm rec})\left(\frac{t}{t_{\rm rec}}\right)^{-1/3} \tag{4.112}$$

となる. ただし暗黒物質に対する線形成長解 $\delta_{\rm DM}(t) = \delta_{\rm DM}(t_{\rm rec})(t/t_{\rm rec})^{2/3}$ を用いた. これからバリオンの密度揺らぎはすぐに暗黒物質の密度揺らぎに追いつくことが分かる.

a.　ジーンズ質量

宇宙初期の星形成に対してジーンズ質量を見積もってみよう. 暗黒物質ハロー中心部でバリオン物質の収縮が十分進みその密度が暗黒物質密度よりもはるかに大きくなった状況を考える. したがって密度としてはバリオンだけを考えればよい.

$$\ddot{\delta}_b - \left(k_{\rm J}^2 - k^2\right)\frac{c_s^2}{a^2}\delta_b = 0 \tag{4.113}$$

また暗黒物質ハローは自己重力によって宇宙膨張から切り離されているので, 宇宙膨張の影響も無視した.

今, 考えている状況ではバリオン流体を理想気体とみなせる. 比熱比 $\gamma = 5/3$, 質量 m の単原子理想気体の状態方程式は

$$p = \frac{\rho k_{\rm B} T}{m_p} \tag{4.114}$$

また $p/\rho^\gamma =$ 一定 なので, このときの音速は次のように計算される.

$$c_s^2 = \left.\frac{p}{\rho}\right|_S = \frac{\gamma p}{\rho} = \frac{\gamma k_{\rm B} T}{m_p} \tag{4.115}$$

これをジーンズ質量の定義に代入して

$$M_{\mathrm{J}} = \frac{5\sqrt{5}\pi^{5/2}}{18\sqrt{3}} \left(\frac{k_{\mathrm{B}}}{Gm_p}\right)^{3/2} \left(\frac{T_{\mathrm{b}}^3}{\rho_{\mathrm{b}}}\right)^{1/2} \tag{4.116}$$

b. 種族 III の星形成と原始銀河の誕生

現在の宇宙には太陽に代表される円盤銀河の円盤部に多く存在する金属（水素とヘリウム以外の元素すべての総称）を豊富に含む種族 I と呼ばる星と，楕円銀河や球状星団，円盤銀河のバルジ（bulge：円盤銀河の中心部にある球状の古い星の集団）を構成している金属量が少ない種族 II と呼ばれる星がある．たとえば太陽の金属量は重量比にして 2 %程度であるのに対して，種族 II の星ではその 10 分の 1 から 100 分の 1 程度である．この違いは星ができた時期に関係がある．リチウムよりも重たい金属は星の中，あるいは超新星爆発でしか合成されず，したがって過去の宇宙には金属が少ない．種族 II の星はこのような金属が少なかった時期に生まれた星であり，種族 I の星はその後に生まれた星である．

これに対して宇宙で最初にできた星を，種族 III として分類する．赤方偏移が 20，あるいはそれ以前に種族 III の星が生まれたと考えられているが，この時期にはごくごく少量の重水素，リチウムなどを除いては水素原子とヘリウム原子しか存在しないため，現在の宇宙にできる星とはかなり違った星ができる．現在の宇宙には星の中でつくられた炭素や酸素，窒素などの金属が存在する．金属は星ができるときに重要な役割を果たす．現在の宇宙でも星は主に水素でできた星間ガスの分子雲と呼ばれるとくに密度の濃く水素分子や一酸化炭素分子などが存在する領域でつくられる．ガスは何らかの原因で収縮を始めると断熱圧縮によって温度を上げる．高温になると圧力が大きくなるため収縮が妨げられる．ガスがさらに収縮が進行して星をつくるためには，熱を高温部から逃がして温度を下げなければならない．このとき星間ガスに含まれる金属が冷却材として重要な役割を果たす．金属には多くの低エネルギー励起状態があり，ガスが加熱されるとこれらの原子は容易に励起状態となる．そして励起状態からより低いエネルギー状態に落ちるときに放射（光子）を出し，それが外に逃げることができれば（光学的に薄いという），高温ガスの温度を下げることができる．より温度が下がれば，上で導いたジーンズ質量の式から分かるようにより小質量の星ができる．また炭素，窒素，酸素があると，それらが触媒の役割を

果たし水素の核融合を非常に効率よく進める（これを CNO サイクルという）．太陽質量程度，あるいはそれ以下の星では，陽子と陽子の連鎖反応によって核融合を起こす pp チェインが主で，太陽の場合，CNO サイクルの 100 倍程度のエネルギーを出しているが，太陽よりも重たい星では CNO サイクルが主なエネルギー源である．

一方，宇宙初期の星形成の場合，金属がないためかなり事情が違う．上で見たように暗黒物質のハローは質量の小さいものからできていく．したがってバリオンはまず小質量の暗黒物質ハローに落ち込む．このとき落ち込んだガスの中心密度が上がると，そのごく一部が水素分子をつくる．水素分子の回転運動のエネルギーが励起され，それが基底状態に戻るときにエネルギーを放射する．これが冷却材の役割を果たす．ただしガスの温度が 1000 K 程度にならないと水素分子の形成が始まらないため冷却は起こらない．落ち込んだガスの温度は式 (4.102) で与えられるビリアル温度で評価されるから，暗黒物質ハローの質量が小さいうちはガスの温度はこれほど上がらない．赤方偏移が 20 から 30 程度になると暗黒物質ハローの中には，$5 \times 10^4\, M_\odot$ 程度のものができ，その中ではガスは 1000 K を超え，水素分子の冷却が有効に働いて収縮が進行する．ただし密度が $n \simeq 10^4\,\mathrm{cm}^{-3}$ 程度になると，励起状態にある水素分子がエネルギーを放射する前にほかの粒子と衝突し，それよって基底状態に戻ることが妨げられてしまうので水素分子による冷却はあまり有効でなくなる．このときガスの温度は 200 K 程度にまで下がっている．さらに収縮が進むには，ハロー内のガスが降り積もりジーンズ質量を超さなければならない．上のジーンズ質量の式は，

$$M_\mathrm{J} \simeq 300 \left(\frac{T}{200\,\mathrm{K}}\right)^{3/2} \left(\frac{n_\mathrm{H}}{10^4\,\mathrm{cm}^{-3}}\right)^{-1/2} M_\odot \tag{4.117}$$

と評価されるから，これ以上の質量になればガスはさらに収縮する．収縮はまずゆっくりと進行し数密度が，$n_\mathrm{H} \simeq 10^8\,\mathrm{cm}^{-3}$ 程度になると，水素原子の 3 体衝突によって水素はほぼすべて水素分子になり，その結果，また冷却が効き始めて重力崩壊が急速に進む．さらに高密度になると水素分子から放射された光子がそこから抜け出せなくなって冷却ができなくなり（不透明になるという），その後の収縮はゆっくりと進み，そして数密度 $n_\mathrm{H} \simeq 10^{20}\,\mathrm{cm}^{-3}$ を超えると，熱圧力によって収縮が止まり太陽質量の 100 分の 1 程度の質量をもった力学平

衡にあるコアができる．このコアを原始星という．原始星にさらにガスが降り積もって質量が増加し，最終的に中心部で水素の核融合が始まり星が生まれる．

ガスが原始星へどんどん降り積もって最終的にできる種族 III の星の質量は，太陽質量の数十倍から 100 倍程度と考えられている．降着するガスの角運動量が大きい場合には，星の周りに円盤をつくり，その円盤が分裂することで大質量星の周りにより小質量の星もできる可能性もある．上にも述べたように現在の宇宙では大質量星は，CNO サイクルによって核燃焼を起こし非常に効率よくエネルギーを生成している．しかし種族 III の星では金属量がごくわずかであるため，CNO サイクルによる核燃焼率が低い．そのため中心部の温度がより高温になる．その結果，星の表面温度も約 10 万 K 程度にまで達し，周りに高エネルギー紫外線を放射する．紫外線はハロー内，あるいは近傍のハロー内の水素分子を解離し，周りのガスを電離する．さらに 300 万年という宇宙論的にはごく短時間で超新星爆発を起こす．これらの影響によって引き続く星の生成は大きな影響を受け，生成される星の性質も違ってくる．このため小さな暗黒物質ハローの中で最初にできた星を種族 III.1，それに引き続いてできた星を種族 III.2 と分類することがある．

種族 III.1 の星ができると，その影響によって引き続く星形成の条件が変わる．まず強力な紫外線によってハロー内やその周りを電離し，HII 領域の泡をつくる（中性水素の雲を HI 領域といい，電離した水素ガスの領域を HII 領域という）．また超新星爆発によってハロー内のガスを吹き飛ばすが，同時に近傍のハロー内のガスを電離する．こうして引き続く星形成は，電離ガスから始まることになる．このことはその後の星形成に有利に働く．水素分子は電子を触媒として生成されるので，電離して自由電子の数が増えると水素分子も増える．また電離ガス内では，水素分子と重水素イオンが結びついて水素と重水素が結合し分子 (HD) をつくる．こうして多くの冷却材が準備されるため，いったん電離の原因がなくなってガスが中性化すると星形成が効率的に起こるのである．また HD 分子は非常に低いエネルギーの回転順位をもっていることや順位の遷移時間が短いことなどのため有効な冷却材で，ガスの温度を 100 K 程度にまで下げることができる．温度が下がるとジーンズ質量が減少するので，より小質量の星（太陽質量の 10〜20 倍程度）をつくることができる．この場合にも降り積もるガスの角運動量が大きければ星周円盤をつくり，その分裂によっ

て大質量の種族 III の星の周りに太陽質量程度の小質量の星ができる可能性もある．星の寿命はその質量により，たとえば太陽質量の 80 %の質量をもった星の年齢は 200 億年を超える．もしそのような小質量の星ができたとすれば現在の宇宙にも残っているはずで，金属量は太陽の 100 万分の 1 程度と想定される．もしそのような小質量の種族 III の星が存在すれば，銀河ハロー中に残っている可能性がある．

一方，暗黒物質ハローはより大きな質量のものができていくので，その中に落ち込んだガスは衝撃波をつくり温度が 10^4 K を超える．すると水素原子による冷却も有効になる．こうしてどんどん種族 III の星が形成されていく．小質量の暗黒物質ハローはより大きな質量のハローに飲み込まれ，より大きな暗黒物質ハローができる．$10^6\,M_\odot$ 程度の暗黒物質ハローの中では継続的に星がつくられるだろう．これら星形成が進んだ暗黒物質ハローが集まって，赤方偏移が 10 程度で我々の銀河系のような大きな銀河が生まれたと考えられている．2012 年末には赤方偏移が約 10.8 と推定される原始銀河が発見されている．この銀河は赤方偏移が 0.59 にある銀河団の重力レンズを受けて 3 つの像として観測されたが，重力レンズによって 8 倍，7 倍，2 倍程度に拡大，増光されている．もともと天体の直径は約 600 光年と見積もられており，銀河というよりも銀河をつくった構成要素，すなわちその中で星形成が継続的に起こっている暗黒物質ハローと考えられている．

c. 宇宙の再電離

暗黒物質ハロー内で星が生まれると，晴れ上がった後の中性化した宇宙に大きな変化をもたらす．種族 III の星ができた暗黒物質ハローの周りは HII 領域となり，星形成がどんどん進行することで，HII 領域は増加していく．そしてついには空間全体をおおい，宇宙全体が再び電離した状態になる．これを宇宙の再電離と呼ぶ．

初期宇宙で再電離が起こったことは，クェーサーの吸収線から知ることができる．水素原子のスペクトルには波長 126 nm に強い輝線が見える．これをライマン α 線（第 1 励起状態から基底状態への遷移の際に放出される電磁波）というが，このことは中性水素がこの波長の電磁波を吸収するということでもある．エネルギーを吸収して励起状態に上がった電子はやがて基底状態に落ちてライマン α 線を出すが等方的に放射されるため，やってきた方向からの放射は失わ

れる．この吸収断面積は非常に大きく，銀河間のガス（銀河間ガス）の中に中性水素の割合が 10 万分の 1 程度でも存在すれば，この波長の電磁波は銀河間ガスを通り抜けられなくなる（これを銀河間ガスがこの電磁波に対して不透明になるとか，光学的に厚くなるという）．こうして赤方偏移 z の宇宙に中性水素ガスが少しでもあれば，より遠方の天体（クェーサーやガンマ線バースト）から放射された電磁波のスペクトルには $126(1+z)$ nm で強い吸収線が存在する．実際に遠方クェーサーのスペクトル中に宇宙空間の中性の水素ガスによる吸収線が多数観測されている．吸収線の 1 つ 1 つは違う赤方偏移にある中性水素ガスによるもので，たとえば赤方偏移 3 にある中性水素ガスは，$126 \times 4 = 504$ nm に吸収線をつくる．このような中性水素ガスが様々な赤方偏移で存在するのでクェーサーのスペクトルには数多くの吸収線がある．それらをライマン α の森という（図 4.3）．もし中性水素が銀河間空間に一様にわずかでも残っていたらどうだろう．この場合，ある特定の波長ではなく，クェーサーの赤方偏移を z とすると $126(1+z_s)$ nm よりも短波長部分のスペクトルは完全になくなっているだろう．こうして遠方クェーサーのスペクトルの観測から，初期宇宙の中性

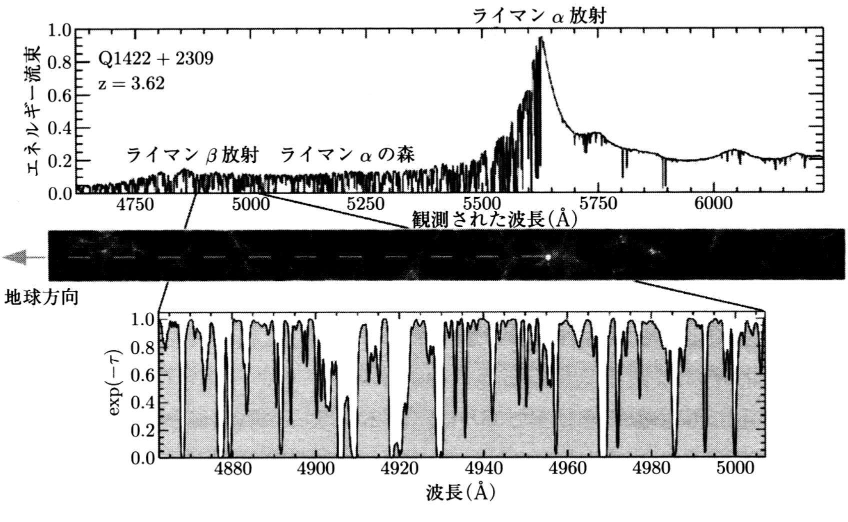


図 4.3　赤方偏移 3.62 のクェーサーのスペクトル中に見られるライマン α の森
［V. Springel *et al.*, "The large–scale structure of the Universe", *Nature*, **440**, 7088, 1137, 2006］

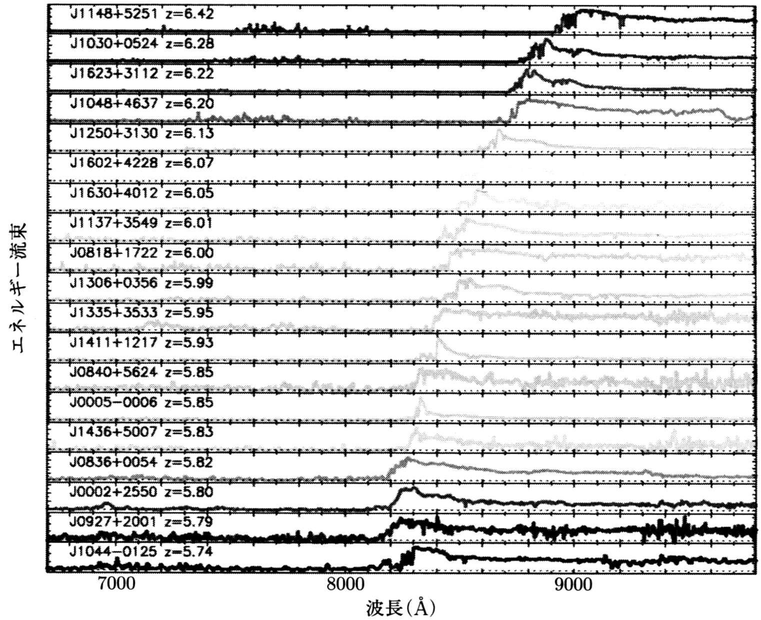


図 4.4 SDSS で観測された赤方偏移が 5.74 から 6.42 の 19 個のクェーサーのスペクトル

これから赤方偏移が 6.07 以上では銀河間空間に無視できない量の中性水素が残っていることが示唆される（ガン–ペターソンテスト）.［X. Fan *et al.*, "Constraining the Evolution of the Ionizing Background and the Epoch of Reionization with $z \sim 6$ Quasars. II. A Sample of 19 Quasars", *A.J.*, **132**, 1, 117, 2006］

水素ガスの存在を検証することができる．これを提案者の名にちなんでガン–ペターソン（Gunn–Peterson，ともにアメリカの天文学者）テストという（このテストが提案されたのは 1965 年であるが，同じ年にドイツの天文学者シャウアー（P. Scheuer）も同じ提案をしている）．図 4.4 に見るように赤方偏移 6 程度ではライマン α 線より短い波長域に減衰が見られないことから，その当時には中性水素ガスはなく宇宙空間は完全電離した状態であることが分かる．また水素ガスが電離して自由電子が増加すると，その電子によって散乱された宇宙マイクロ波は偏光する．この偏光は WMAP によって観測されていて，宇宙は赤方偏移 10 程度で再電離したと考えられている．

ここで述べた宇宙の暗黒時代，種族 III の星形成，宇宙の再電離は現代宇宙

論の最先端分野の１つであり，まだ確定的なことはいえない．しかし今後，サブミリメートルやミリメートルという電波領域の観測が進むにつれて近い将来急速に理解が進むと期待されている．

5 宇宙マイクロ波背景放射と温度揺らぎ

現在の宇宙は，初期宇宙は熱平衡にあった名残りである絶対温度 2.725 K のほぼ完ぺきなプランク分布をもった熱放射で満たされている．これを宇宙マイクロ波背景放射（CMB）といい，宇宙の大域的な幾何学とエネルギーの内容，初期宇宙の情報をもっている．したがって CMB の観測は現代宇宙論の最も重要な観測である．そこでこの章では，CMB について詳しく説明する．

5.1 光子・バリオン流体の音響振動

第 3 章で述べたとおり宇宙の晴れ上がりまでは，バリオン物質は光子と頻繁に衝突を繰り返し 1 つの流体のように振舞っていた．この流体を光子・バリオン流体という．この流体中に音波が伝播し，その音速が

$$c_s = \sqrt{\frac{1}{3(1+R)}} \tag{5.1}$$

であった．

音響振動で重要なのは，音波が伝播する範囲で，これを音波地平線という．

$$r_s(t) = \int_0^t \frac{c_s}{a} dt = \int_0^{a(t)} \frac{c_s}{a^2 H} da \tag{5.2}$$

で与えられる．

問題： この積分を実行し答えが次のように書けることを示せ．

$$r_s(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{2}{k_{\rm eq}\sqrt{R_{\rm eq}}} \ln \left(\frac{\sqrt{R+1} + \sqrt{R+R_{\rm eq}}}{\sqrt{R_{\rm eq}}+1} \right) \tag{5.3}$$

ここで R の定義から導かれる関係 $da/dR = a_{\rm eq}/R_{\rm eq}$ を使っている．また $k_{\rm eq}$

は第 2 章で定義した等密度時のハッブル地平線半径に対応する波数 (2.53) である.

これから宇宙の晴れ上がりのときの音響地平線半径は, $R = R_{\rm dec} \equiv R(t_{\rm dec})$ とすれば得られて

$$r_s(t_{\rm dec}) \simeq 103h^{-1}\,{\rm Mpc}^{-1} \simeq 147.6\ {\rm Mpc}^{-1} \tag{5.4}$$

これが CMB の温度揺らぎや BAO のスケールとなる. ここで

$$R_{\rm dec} = R_{\rm eq}\frac{a_{\rm dec}}{a_{\rm eq}} \simeq 0.61\left(\frac{1+z_{\rm dec}}{1090}\right)^{-1}\left(\frac{\Omega_{b,0}h^2}{0.022}\right) \tag{5.5}$$

を用いた.

5.2 温度揺らぎの記述

宇宙マイクロ波背景放射の温度分布は, 全天におけるマイクロ波の強度分布として観測される. この強度分布と温度分布は以下のように関係している.

まず温度揺らぎは観測者が測る方向依存性をもっているので, この依存性を球面調和関数で展開する.

$$\Theta(\vec{n})_{\rm obs} = \frac{T(\vec{n}) - T_{\rm CMB,0}}{T_{\rm CMB,0}} = \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}Y_{\ell m}(\vec{n}) \tag{5.6}$$

ここで $T_{\rm CMB,0} = 2.726$ K は CMB の平均温度である. ℓ は天球上の温度パターンを表し観測者の天球を見込む角度 θ の逆数で, $\ell = 1$ の双極子分布が 180 度に対応するから

$$\ell \simeq 180\frac{1\,[\rm degree]}{\theta} \tag{5.7}$$

の関係がある. $a_{\ell m}$ は各 ℓ パターンの振幅を表す. 温度揺らぎは各方向でランダムな値をもつが, 統計的には等方的であるので次のアンサンブル平均で特徴づけられる (* は複素共役を表す).

$$\langle a_{\ell m}\rangle = 0 \tag{5.8}$$

$$\langle a_{\ell m}a^*_{\ell' m'}\rangle = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}C_\ell \tag{5.9}$$

この C_ℓ を温度揺らぎのパワースペクトルという. 温度揺らぎがガウス的であ

れば，このパワースペクトルだけで統計的な性質が決まる．観測的には揺らぎの非ガウス成分は非常に小さくまだ発見されていない．しかし非ガウス成分は宇宙初期の情報や宇宙の晴れ上がりから現在にいたる宇宙の物質分布の非一様性などの情報をもっているので重要である．

パワースペクトルを用いると温度揺らぎの 2 乗平均は次のように表される．

$$\langle|\Theta_{\rm obs}|^2\rangle = \sum_{\ell m}\sum_{\ell' m'}\langle a_{\ell m}a^*_{\ell' m'}\rangle Y_{\ell m}(\vec{n})Y_{\ell' m'}(\vec{n}) = \sum_{\ell}\frac{2\ell+1}{4\pi}C_\ell \tag{5.10}$$

$\ell \gg 1$ のとき，この和は以下のように積分で近似される．

$$\sum_{\ell}\frac{2\ell+1}{4\pi}C_\ell \simeq \int\frac{\ell(2\ell+1)}{4\pi}C_\ell\, d\ln\ell \simeq \int\frac{\ell(\ell+1)}{2\pi}C_\ell\, d\ln\ell \tag{5.11}$$

したがって $\ell(\ell+1)C_\ell/2\pi$ は角度空間の対数間隔あたりのパワーとなり，この量が温度揺らぎとしてプロットされることが多い（図 5.1）．

このパワースペクトルとポテンシャルの揺らぎ（パワースペクトル）の間には以下の関係がある．今，背景時空は平坦であるから温度揺らぎの空間分布は

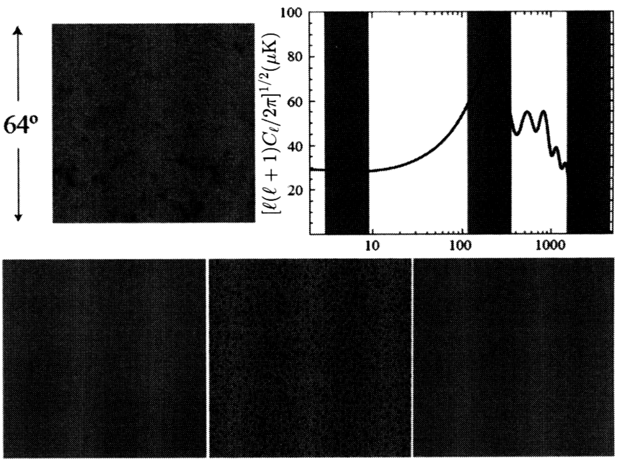


図 5.1 パワースペクトルの意味

上図は温度揺らぎの場（左）のパワースペクトル（右）．パワースペクトルの横軸は，$\ell = 180/\theta$．下の図は，揺らぎの場の $\ell \leq 10$, $\ell \simeq 200$, $\ell \geq 1500$ の揺らぎの成分を取り出したもの．対応する領域のパワースペクトルの振幅は，その領域の揺らぎの大きさを表す．$\ell \simeq 200$，角度で 1° 程度のスケールの揺らぎが卓越していることが分かる．［W. Hu, "Lecture Notes on CMB Theory: From Nucleosynthesis to Recombination", arXiv:0802.3688, 2008］

次のようにフーリエ展開される.

$$\Theta_{\rm obs}(\vec{x}) = \int \Theta_{\rm obs}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{5.12}$$

我々が観測するのは宇宙の晴れ上がる時点での温度揺らぎだから, $\vec{x} = \eta_{\rm rec}\vec{n}$ とおけば,

$$\Theta_{\rm obs}(\vec{n}) = \int \Theta_{\rm obs}(\vec{k}) e^{i\eta_{\rm rec}\vec{k}\cdot\vec{n}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{5.13}$$

となる. ここで $\vec{n}$ は観測者から天球への方向を表す単位ベクトルである. 量子力学でよく行われるように指数関数のベッセル関数での展開（レイリー (Reyleigh) の公式）を代入すると

$$\Theta_{\rm obs}(\vec{n}) = \sum_{\ell m} \int \Theta_{\rm obs}(\vec{k}) 4\pi i^\ell j_\ell(k\eta_{\rm rec}) Y^*_{\ell m}(\hat{\vec{k}}) Y_{\ell m}(\vec{n}) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{5.14}$$

となる（$\hat{\vec{k}}$ は $\vec{k}$ 方向の単位ベクトル）. これを式 (5.8) と比べて

$$a_{\ell m} = 4\pi i^\ell \int \Theta_{\rm obs}(\vec{k}) j_\ell(k\eta_{\rm rec}) Y^*_{\ell m}(\hat{\vec{k}}) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{5.15}$$

を得る. これから

$$\langle a_{\ell m} a^*_{\ell' m'} \rangle = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \frac{2}{\pi} \int k P_\Theta(k) j^2_\ell(k\eta_{\rm rec}) dk = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} C_\ell \tag{5.16}$$

ここで

$$\langle \Theta_{\rm obs}(\vec{k}) \Theta_{\rm obs}(\vec{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') P_\Theta(k) \tag{5.17}$$

として温度揺らぎのパワースペクトルを定義した. ここで以下で導く Sacks–Wolfe の関係 $\Theta_{\rm obs} = \frac{1}{3}\Psi$ を用いると, 温度揺らぎのパワースペクトルとニュートンポテンシャルのパワースペクトルの関係が

$$P_\Theta(k) = \frac{1}{9} P_\Psi(k) \tag{5.18}$$

となるから

$$C_\ell = \frac{2}{9\pi} \int k P_\Psi(k) j^2_\ell(k\eta_{\rm rec}) dk = \frac{4\pi}{9} \int \Delta_\Psi(k) j^2_\ell(k\eta_{\rm rec}) d\ln k \tag{5.19}$$

2 番目の等号は規格化されたパワースペクトル $\Delta^2(k) \equiv k^3 P(k)/2\pi^2$ を用いた. 揺らぎの初期パワースペクトルは特定のスケールに依存しない（スケール

フリー）ことが期待されるので，次の形が仮定される．

$$\Delta_\Psi(k) = A_S \left(\frac{k}{H_0}\right)^{n_s-1} \tag{5.20}$$

ここで規格化因子 A_S は現在のハッブル地平線に対応する揺らぎのパワーである．またポアッソン方程式から，$k^2\Psi \propto \delta$ となるから，$\Delta_\Psi \propto k^3 P_\Psi \propto P_\delta/k$ に注意すれば，上のスケーリングは $P_\delta \propto k^{n_s}$ と同じであることが分かる．次章で述べるように揺らぎはインフレーション時の量子揺らぎでつくられると考えられているが，規格化因子は理論では決まらず観測から決めなければならない．このスペクトルの形は遷移関数の影響をあまり受けない等密度期での地平線よりも大きなスケール（小さな k）に対しては成り立っている．すると上の積分はすぐにできて

$$C_\ell = \frac{4\pi}{9} A_S \frac{\sqrt{\pi}}{4} (H_0 \eta_{\rm rec})^{1-n} \frac{\Gamma\left(\frac{3-n}{2}\right)\Gamma\left(\ell + \frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4-n}{2}\right)\Gamma\left(\ell + \frac{5-n}{2}\right)} \tag{5.21}$$

となる．ここで右辺の Γ はガンマ関数で，$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ を満たす．特に $n = 1$（ハリソン–ゼルドビッチスペクトル）の場合は

$$C_\ell^{\rm HZ} = \frac{2\pi}{9} \frac{A_S}{\ell(\ell+1)} \tag{5.22}$$

となり，$\ell(\ell+1)\Delta^2(k) \propto \ell(\ell+1)C_\ell$ は，ℓ によらず一定となる．これが WMAP で観測された大スケール ($\ell \leq 10$) での振舞いである（$\ell \leq 5$ 程度では後期 ISW 効果によってパワーが少し大きくなる）．

5.3 CMB 温度揺らぎの生成メカニズム

これまで述べてきたように CMB の温度揺らぎは宇宙の晴れ上がり以前の光子・バリオン流体中を伝わる音波が原因である．この音波振動は CMB の温度揺らぎとして観測される．音波振動の詳細はバリオン密度，物質密度，空間の曲率，暗黒エネルギー密度などに依存するので，温度揺らぎを観測することで多くの貴重な情報が得られる．まず音響振動の詳細がどのように宇宙論パラメータに依存するか，そしてそれらがどのように温度揺らぎに反映されるかを見てみよう．

宇宙晴れ上がり前の光子・バリオン系を正確に取り扱うにはボルツマン方程

式が必要であるが，ここでは光子とバリオンの結合が十分強く，以下のストレス・エネルギーテンソルをもった流体として話を進める．

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}, \ \ \rho = \rho_\gamma + \rho_b, \, P = P_\gamma = \frac{1}{3}\rho_\gamma \tag{5.23}$$

背景時空の計量は共形時間を使った次の形を仮定する．

$$ds^2 = a(\eta)\left[-(1+2\Psi)d\eta^2 + (1+2\Phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2)\right] \tag{5.24}$$

ここで Ψ はニュートンポテンシャル，Φ は空間曲率を表し，ともに微小量である．このときストレス・エネルギーテンソルの保存則（「;」は共変微分，「,」は偏微分を表す．A.2 参照）

$$T_{\mu;\nu}^{\ \nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}\,T_\mu^{\ \nu}\right) - \frac{1}{2}g_{\nu\rho,\mu}T^{\nu\rho} = 0 \tag{5.25}$$

を揺らぎ (Ψ, Φ) の 1 次までで具体的に書き下すと以下のようになる．

$$\rho' + \frac{a'}{a}\rho + 3\left(\frac{a'}{a} + \Phi'\right)(\rho + P) + \partial_i\left[(\rho + P)v^i\right] = 0 \tag{5.26}$$

$$\left[(\rho + P)v^i\right]' + 4\frac{a'}{a}(\rho + P)\,v^i + P_{,i} + (\rho + P)\,\Psi_{,i} = 0 \tag{5.27}$$

第 1 の式が連続の式，第 2 の式がオイラー方程式である．ここで密度を $\rho = \bar{\rho} + \delta\rho$ として上の式を線形化すると，

$$\delta\rho_\gamma{}' + 4\frac{a'}{a}\left(\delta\rho_\gamma + \Phi'\right) + \frac{4}{3}\bar{\rho}_\gamma\partial_i v^i = 0 \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned}&\left[(1+R)(\bar{\rho}_\gamma + \bar{P}_\gamma)v^i\right]' + 4a'a(1+R)(\bar{\rho}_\gamma + \bar{P}_\gamma)v^i + \partial_i P_\gamma \\ &\quad + (1+R)(\bar{\rho}_\gamma + \bar{P}_\gamma)\partial_i\Psi = 0\end{aligned} \tag{5.29}$$

ここで重力ポテンシャル Ψ に対する方程式が必要であるが，物質優勢時には次のようになる．

$$\Delta\Psi = 4\pi G a^2 \bar{\rho}_m \delta_m \tag{5.30}$$

ここで $\bar{\rho}_m$ は暗黒物質も含めた物質の平均エネルギー密度，δ_m はその揺らぎである．

5.3.1　光子流体の振動

これらの方程式に基づいて議論していくわけであるが，物理的な意味を理解

しやすくするために，この流体の音波振動を光子流体の振動にバリオンと重力が影響したものとみなそう．したがってまずバリオンと重力が存在しない場合の振動を考えてみよう．上の方程式系で $\Phi = \rho_b = 0$ とすればよい．すると

$$\rho_\gamma{}' + 4\frac{a'}{a}\rho_\gamma + \nabla \cdot (\rho_\gamma \vec{v}_\gamma) = 0 \tag{5.31}$$

$$[(\rho_\gamma + p_\gamma)\vec{v}_\gamma]' + 4(\rho_\gamma + p_\gamma)\frac{a'}{a} + \nabla p_\gamma = 0 \tag{5.32}$$

ここで放射密度に微小な揺らぎがあったとしよう．

$$\rho_\gamma = \bar{\rho}_\gamma + \delta\rho_\gamma \tag{5.33}$$

ここで $\bar{\rho}_\gamma$ は一様な背景放射の密度である．したがってこの背景放射は次式を満たす．

$$\frac{d\rho_\gamma}{d\eta} + 4H\rho_\gamma = 0 \tag{5.34}$$

これより揺らぎは次式を満たすことが分かる．

$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\delta\rho_\gamma}{\bar{\rho}_\gamma}\right) = -\nabla \cdot \vec{v}_\gamma \tag{5.35}$$

一方，放射のエネルギー密度が温度の 4 乗に比例することに注意すると，エネルギー密度揺らぎは温度揺らぎに書き換えることができる．

$$\frac{\delta\rho_\gamma}{\bar{\rho}_\gamma} = 4\frac{\delta T}{T} \equiv 4\Theta \tag{5.36}$$

ここで T は一様な背景温度である．結局，温度揺らぎ Θ の従う式は以下のようになる．

$$\Theta' = -\frac{1}{3}\nabla \cdot \vec{v}_\gamma \tag{5.37}$$

オイラー方程式は $p_\gamma = \rho_\gamma/3$ に注意すると

$$\vec{v}'_\gamma = -\nabla\Theta \tag{5.38}$$

と書ける．以上の式から温度揺らぎに対して

$$\Theta'' - \frac{1}{3}\Delta\Theta = 0 \tag{5.39}$$

という振動数 $1/\sqrt{3}$ の単振動の式が得られる（ここでは $c = 1$ としているので光速の $1/\sqrt{3}$ 倍）．以下，フーリエ空間で議論する方が便利なのでフーリエ変換

すると

$$\ddot{\Theta} + c_s^2 k^2 \Theta = 0 \tag{5.40}$$

ここで後の考察に便利なように音速を c_s と書いた（今の場合は $c_s = 1/\sqrt{3}$）．この解は

$$\Theta(\eta) = \Theta(0)\cos(ks) + \frac{\dot{\Theta}(0)}{kc_s}\sin(ks) \tag{5.41}$$

となる．ここで

$$s = \int c_s \, d\eta \tag{5.42}$$

今の場合は c_s は一定なので $s = c_s\eta$ である．この第 1 項は初期の温度揺らぎによる温度揺らぎを表し，第 2 項は初期の速度揺らぎによる温度揺らぎを表す．観測されている温度揺らぎは第 1 項で説明されるのでここでは第 1 項のみを考える．この項を断熱モードという．

我々が観測するのは宇宙の晴れ上がり時の温度揺らぎである．晴れ上がり時の共形時間を $\eta_{\rm dec}$ と書き，対応する音響地平線を $s_{\rm dec}$ と書くと振動のモードは $k_n s_{\rm dec} = n\pi$（n は 0 でない正の整数）を満たす k_n で与えられる．基本モードは $n = 1$ で，このときの 波数を k_0 と書こう．この基本モードに対応する波数は $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ なので，天球上では

$$\theta_0 = \frac{\lambda_0}{d_A(z_{\rm dec})} \simeq \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\eta_{\rm dec}}{\eta_0} \tag{5.43}$$

の角度スケールの揺らぎとして観測される．ここで d_A は現在から宇宙の晴れ上がりまでの共形角径距離で平坦な宇宙の場合には $d_A = \eta_0 - \eta_{\rm dec}$ となり，$\eta_0 \gg \eta_{\rm dec}$ なので $d_A \simeq \eta_0$ とした．物質優勢期では $\eta \propto a^2$ と $1/a_{\rm dec} \simeq 1100$ から

$$\theta_0 \simeq \frac{1}{30} \simeq 2^\circ \tag{5.44}$$

となる．

5.3.2 重力とバリオンの効果

次に重力とバリオンによって，この温度揺らぎの振動がどのように変化するかを見てみよう．(5.31) 式を見るとバリオンの効果はエネルギー密度を

$$(\rho_\gamma + p_\gamma) \to (1 + R)(\rho_\gamma + p_\gamma) \tag{5.45}$$

と変えることに相当する．これは単振動でおもりの重さが増えたことに相当し，したがって振幅が大きくなり，観測される温度揺らぎが大きくなる．一方，重力の効果は圧力勾配に加えてニュートンポテンシャルによる力が加わること，および局所的なスケール因子を $a(1+\Psi)$ とみなすと Ψ の 1 次までの近似で空間の膨張率が，$H+\dot{\Psi}$ に変化したと解釈できる．この膨張率の変化は背景放射のエネルギー密度の時間変化とは無関係だから，温度揺らぎの時間変化に影響する．上にならって変形するとバリオンと自己重力の影響を受けた式は波数空間で以下のように書くことができる．

$$\Theta' = -\frac{1}{3}kv - \dot{\Phi} \tag{5.46}$$

$$[(1+R)\vec{v}_\gamma]' = k\Theta + (1+R)k\Psi \tag{5.47}$$

この 2 式から温度揺らぎに対する式が次のように得られる．

$$\left[(1+R)\Theta'\right]' + \frac{1}{3}k^3\Theta = -\frac{1}{3}k^2(1+R)\Psi - \left[(1+R)\Phi'\right]' \tag{5.48}$$

ニュートンポテンシャル Ψ はポアッソン方程式を満たす．

$$k^2\Psi = 4\pi G a^2 \bar{\rho}_m \delta_m \tag{5.49}$$

今，物質優勢期を考えると平均密度 $\bar{\rho}_M$ はスケール因子の 3 乗に反比例し，一方，密度揺らぎはスケール因子に比例して増加する．したがってニュートンポテンシャルはスケール因子依存性をもたない，すなわち一定であることが分かる．またこのときアインシュタイン方程式から $\Phi = -\Psi$ となる．さらに R は宇宙膨張の時間スケールで変化するが，音響振動の時間スケールに比べて十分ゆっくりと変化するとして一定とみなす．これらの条件のもとで上式は

$$\Theta'' + c_s^2 k^3 \left[\Theta + (1+R)\Psi\right] = 0 \tag{5.50}$$

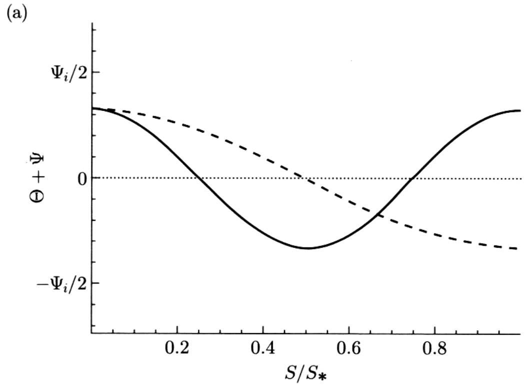
と書ける．ここで c_s は音速である．

$$c_s^2 = \frac{1}{3(1+R)} \tag{5.51}$$

この式は，R, Φ が定数であることから，$\Theta + (1+R)\Psi$ に対する単振動の式とみなすことができる．断熱揺らぎを仮定すると，この解は

$$\left[\Theta + (1+R)\Psi\right](\eta) = \left[\Theta + (1+R)\Psi\right](0)\cos(ks) \tag{5.52}$$

となる．この解は次のようにして解釈される．まず我々が観測する温度揺らぎは，宇宙の晴れ上がりの時点での温度揺らぎ Θ そのものではなく，その時点での重力ポテンシャルによる赤方偏移を受けたもの $\Theta_{\rm obs} = \Theta + \Psi$ である（図5.2(a)）．この初期値は，フー（W. Hu）とホワイト（M. White）による以下のような簡単な考察から求めることができる．宇宙の晴れ上がりでの密度揺らぎは重力ポテンシャルの揺らぎ Ψ を引き起こすが，これが直接引き起こす温度揺らぎは，$T \propto a^{-1}$ から



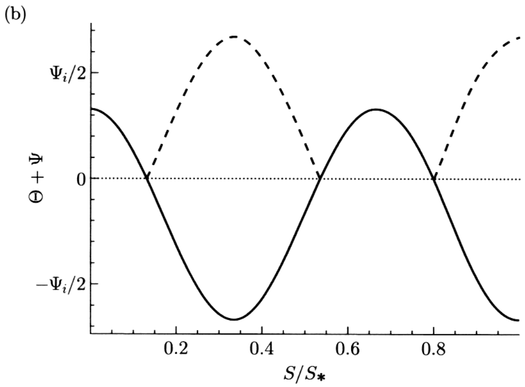


図 5.2　(a) バリオンの影響がない場合の音響振動，(b) 音響振動とバリオンの効果
［W. Hu, "Lecture Notes on CMB Theory: From Nucleosynthesis to Recombination", arXiv:0802.3688, 2008］

$$\Theta = \frac{\delta T}{T} = -\frac{\delta a}{a} = -\frac{2}{3}\frac{\delta t}{t} \tag{5.53}$$

としてその時点でのスケール因子の揺らぎとして表される．ここで物質優勢時での関係 $a \propto t^{2/3}$ を用いた．一方，$dt^2 \to (1+2\Psi)dt^2$ から分かるように重力ポテンシャル Ψ は時間座標の変化率

$$\frac{\delta t}{t} = \Psi \tag{5.54}$$

に相当する．これから

$$\Theta = -\frac{2}{3}\Psi \tag{5.55}$$

となり，実際に観測される温度揺らぎ $\Theta_{\rm obs}$ の初期値は

$$[\Theta + \Psi](0) = \frac{1}{3}\Psi(0) \tag{5.56}$$

この関係を Sacks–Wolfe 効果という．この関係から晴れ上がり時点で高密度の領域（したがって重力ポテンシャルは負）の温度は平均より低く観測される．

Sacks–Wolfe 効果を使うと上の解は

$$\Theta_{\rm obs} = \frac{1}{3}(1+3R)\Psi(0)\cos(ks) - R\Psi \tag{5.57}$$

となり，バリオンの影響で振幅が (1+3R) 倍になることが分かる．また振動の中心が $-R\Psi > 0$ だけ上にずれる（図 5.2(b)）．したがって k が十分小さいときの値は $k \simeq 0$ として一定値 $\Psi/3 < 0$ になり，最初のピーク $k_1 = \pi/s$ など奇数番目のピークは $-(1/3+2R)\Psi > 0$ となる．これに対して偶数番目のピークは $\Psi/3$ となり，バリオンの量に依存しなくなる．こうしてたとえば 1 番目のピークの高さと 2 番目のピークの高さを比べることによってバリオンの量に対する制限が得られる（図 5.3）．

実際には宇宙の晴れ上がり時での音響地平線よりも小さなスケールに対して光子とバリオン流体は完全に一体としては振舞わない．この速度の違いが粘性として働き，温度揺らぎを消すシルク減衰が起こる．シルク減衰の影響を考慮すると，上式は次のようになる．

$$\Theta_{\rm obs} = e^{-(k/k_D)^2}\frac{1}{3}(1+3R)\Psi(0)\cos(ks) - R\Psi \tag{5.58}$$

ここで k_D は減衰スケール $\ell_{\rm eff}$ に対応する波数である．このスケールは第 3 章

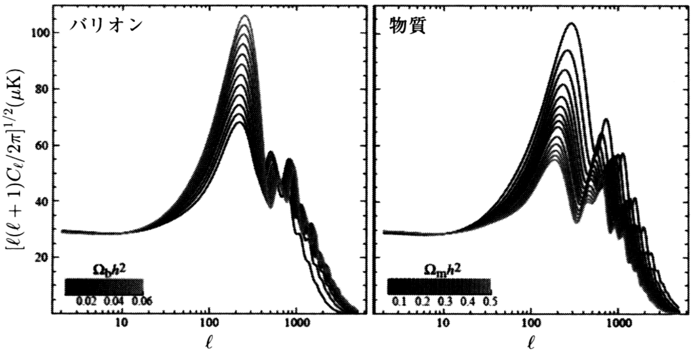


図 5.3 バリオンと物質密度のパワースペクトルに対する効果
[W. Hu, "Lecture Notes on CMB Theory: From Nucleosynthesis to Recombination", arXiv:0802.3688, 2008]

ですでに計算した ((3.97) 参照).

$$\ell_{\rm eff} = 2.58 \left(\Omega_{m,0}h^2\right)^{-1/4} (\Omega_{b,0}h^2)^{-1/2} \simeq 24 \text{ Mpc} \tag{5.59}$$

この減衰スケールからも物質密度, バリオン密度の情報が得られる.

以上の議論ではドップラー効果を無視した. 光子バリオン流体の音響振動は流体の運動を誘起し, したがってドップラー効果を引き起こして温度揺らぎをつくる (観測者に向かって運動している流体成分からの放射の温度は高く, 遠ざかっている流体部分からの放射の温度は低く観測される). これによる温度揺らぎのピークは, 密度揺らぎに起因する位相と 90° ずれており, バリオンの影響がない場合その振幅は密度揺らぎによる振幅と変わらない ((5.40) 式参照). しかし我々が観測する温度揺らぎは天球上に射影されたものである. ドップラー効果は方向依存性があるため天球上に射影されると, ピークの幅が大きく広がってしまい揺らぎの振幅が減少してしまう. さらにバリオンの影響で振動の振幅が大きくなる分, 振動のエネルギー保存則から速度は小さくなり, それによる温度揺らぎの振幅も小さくなる. こうしてドップラー効果による温度揺らぎは, 観測される温度揺らぎのピークの基本的な構造に大きな影響を与えない.

5.3.3 そのほかの効果

以上の結論はバリオンの割合 R や重力ポテンシャルが一定という仮定のもと

で得られたが，実際にはこれらの量は変化する．いずれの効果も観測される温度揺らぎから宇宙論の情報を得るに重要である．これらの効果について触れておく．

a. R の時間変化

すでに見たように R はスケール因子に比例して増加し，音速は徐々に下がっていく．これに伴って振動の振幅が徐々に小さくなる．これはこの変化がゆっくりであるため断熱不変量が一定であることを使えば理解できる．振動子の断熱不変量は振動のエネルギー E をその振動数 ω で割った E/ω である．ここでエネルギーは振幅 A の 2 乗と振動数の 2 乗に比例する．したがって断熱不変量は，$A^2\omega$ に比例することになるが，振動数は今の場合 $\omega = kc_s$ であり，音速 c_s は $(1+R)^{-1/2}$ に比例することから，

$$A \propto (1+R)^{-1/4} \tag{5.60}$$

となることが分かる．この効果は R がスケール因子に比例して大きくなることから小さなスケールでより大きくなり，温度揺らぎのパワースペクトルの 3 番目のピークあたりから効いてくる．

b. 積分 Sacks–Wolfe 効果

次に重力ポテンシャルの時間変化による効果について触れよう．一般に重力ポテンシャルが変化するときは重力赤方偏移によって次のように温度変化が起こる．

$$\Theta_{\rm ISW} = \frac{2}{c^3}\int_{\eta_{\rm rec}}^{\eta_0} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} d\eta \tag{5.61}$$

ここで η は共形時間で，η_0, $\eta_{\rm rec}$ はそれぞれ現在，再結合時での共形時間である．重力起源の温度揺らぎで積分された量であるので，積分 Sacks–Wolfe（ISW）効果という．

重力ポテンシャルは完全に物質優勢であれば線形近似の範囲内では一定であるが，放射の影響があったり宇宙定数の影響があると宇宙膨張則が変化するため減衰する．等密度時の赤方偏移は 3400 程度で宇宙の晴れ上がりの値 1100 と極端に違わないので放射の影響が残り重力ポテンシャルが変化する．この効果を初期 ISW 効果と呼ぶ．とくに放射優勢期に地平線に入った揺らぎに対しては，

$$k^2\Psi = 4\pi a^2 \bar{\rho}_\gamma \delta_\gamma \propto a^{-2}\delta_\gamma \tag{5.62}$$

となるから，重力ポテンシャルの振動の位相は放射密度の揺らぎ δ_γ のそれと同じになる．重力ポテンシャルの時間変化は温度揺らぎの方程式の外力として働くので，共鳴現象によって振動が増幅する．こうして等密度期の音響地平線以下の揺らぎが初期 ISW 効果によって増幅される．

物質の密度が小さいほど放射優勢期が長く続き等密度期はより宇宙の晴れ上がりに近づくためより大きく揺らぎがつくられ，温度揺らぎのパワースペクトルのピークが高くなる．またこの効果は a^{-2} に比例して小さくなるので，より小さなスケールにいくと小さくなる．したがって 1 番目と 3 番目のピークの高さを比較することで宇宙における物質密度の情報が得られる．

また宇宙定数の影響は赤方偏移が 0.3 程度で重要になり，その時点での地平面のスケールの揺らぎに対応するスケールの揺らぎに影響を与える．この効果を後期 ISW 効果と呼ぶ．

c.　空間曲率の影響

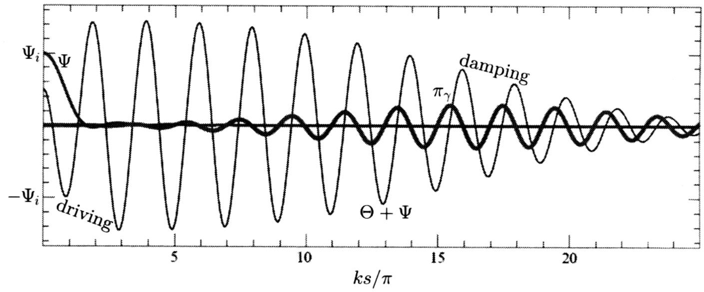
本書では CMB の観測から平坦な宇宙が強く示唆されているので，この場合しか取り扱っていない．この理由を説明しよう．フリードマン方程式において曲率の項や宇宙定数の項は物質，あるいは放射に比べて宇宙の晴れ上がりやそれ以前では全く無視できる．したがってこれらの影響は CMB の温度揺らぎをつくっている音響振動の物理には何の影響も与えない．しかし宇宙の晴れ上がりから現在までの，宇宙の大域的な幾何学は大きな影響を与える．とくに音響地平線のスケールは $\Omega_{m,0}$ と $\Omega_{b,0}$ にしかよらず曲率によらないため，それを見込む角度の違いとして明瞭に現れる（図 5.4）．閉じた宇宙の場合，凸レンズを通したように平坦な宇宙に比べて音響地平線を見込む角度は大きくなる．逆に開いた宇宙の場合は小さくなる．したがって温度揺らぎの最初のピークの位置を観測すれば宇宙の曲率が分かるのである．WMAP では平坦性からのずれを表す宇宙定数，物質，放射の密度パラメータの総和の 1 からのずれに関して次の制限を得ている．以下で述べるように宇宙を平坦と仮定して

$$\Omega_K = \Omega_{\rm total} - 1 = -0.037^{+0.044}_{-0.042} \tag{5.63}$$

すぐ後で述べるがこの制限は Planck 衛星によってさらに厳しくなっている．

d.　等曲率揺らぎ

ここでは断熱揺らぎしか考慮しなかったが，揺らぎのもう 1 つのモードとし



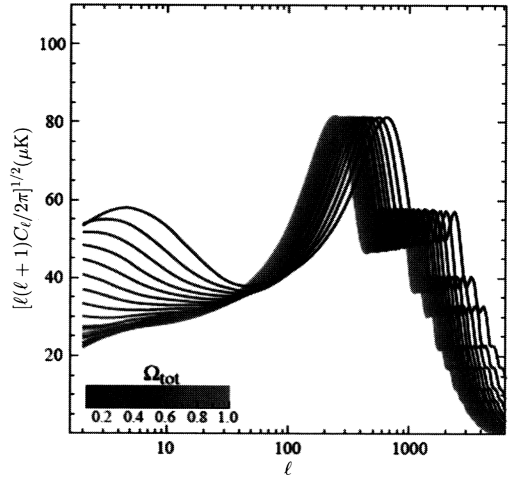


図 5.4 ポテンシャルの時間変化（上）と曲率の影響（下）
[W. Hu, "Lecture Notes on CMB Theory: From Nucleosynthesis to Recombination", arXiv:0802.3688, 2008]

て等曲率揺らぎと呼ばれるものがある．これは方程式 (5.50) の解のうち初速度 $\Theta'(0)$ で決まる項である．この揺らぎは sin 振動で表されるので温度揺らぎのピークの位置が断熱揺らぎに対して半波長ずれる．このため比較的容易に等曲率揺らぎの存在が検証できるが，これまでのところその兆候は発見されていない．また次章で述べるインフレーションでの密度揺らぎの生成では多くの場合，曲率の揺らぎ $\Psi(0) \neq 0$，すなわち断熱揺らぎが生成される．

5.4 CMB 温度揺らぎの観測とその帰結

2002 年に NASA が打ち上げた CMB 観測衛星 WMAP は，CMB の温度揺らぎの精密測定によって誤差数%レベルで宇宙論パラメータの測定を可能とし，また CMB 偏光の観測によって宇宙の再電離の情報をもたらすなど多くの輝かしい成果を残し，2012 年，9 年間の成果を発表して観測を終えた．WMAP に入れ替わるように 2009 年にヨーロッパ宇宙機構（ESO）が打ち上げた CMB 観測衛星 Planck は 2013 年 3 月最初の観測結果を公表した（図 5.5）．ここでは Planck 衛星の結果に基づいて，その宇宙論への制限を述べる．

Planck 衛星は，WMAP の観測範囲が $\ell < 1000$ に対して $\ell < 2500$ と広い角度範囲の CMB の揺らぎを観測できる．その結果，観測された 7 つのピークの位置から最終散乱面での音響地平線の角度として次の値を得た．

$$\theta_H(z_{\rm LS}) = 0.596724^\circ \pm 0.00038^\circ \tag{5.64}$$

この角度は主に宇宙の曲率に依存しているが，物質密度やバリオン密度にも依存しているためこの情報だけでは正確な曲率の制限はでないが，ISW 効果など

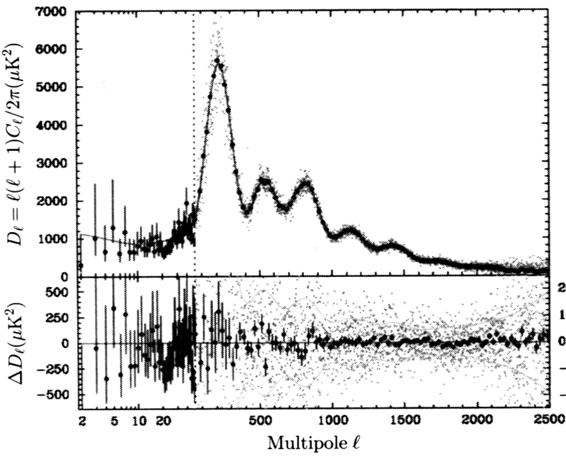


図 5.5 Planck 衛星が観測した温度揺らぎのパワースペクトル
[Planck Collaboration, “Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters”, arXiv:1303. 5076, 2013]

のほかの情報も考慮すると以下のような厳しい制限が得られる.

$$100\Omega_K = -1.0^{+1.8}_{-1.9} \tag{5.65}$$

BAO の情報も合わせると，さらに厳しい制限が得られている.

$$100\Omega_K = -0.1^{+0.62}_{-0.65} \tag{5.66}$$

したがって平坦な宇宙を想定することに何ら問題はないと考えられる.

平坦な宇宙を想定したうえで，Planck チームはパワースペクトルだけの情報に基づく宇宙論パラメータのベストフィットとして以下の値を与えている.

$$\Omega_{b,0}h^2 = 0.0022068$$
$$\Omega_{\rm CDM,0} = 0.12029$$
$$\Omega_\Lambda = 0.6825$$
$$\Omega_{m,0} = 0.3175$$
$$H_0 = 67.11 \text{ km s}^{-1}\,\text{Mpc}^{-1}$$
$$\sigma_8 = 0.8344$$
$$t_0 = 13.819 \text{ Gyr}$$
$$z_{\rm dec} = 1090.43$$
$$z_{\rm eq} = 3402$$

Planck 衛星は宇宙の大域的な構造が CMB に及ぼす重力レンズ効果も検出しており，この効果を入れると上の値は若干変化する．これらの値を WMAP の 9 年間の観測値と比較すると，ハッブルパラメータの値が低く，したがって宇宙年齢が長くなっている．また物質密度がかなり大きくなっている (WMAP では，$\Omega_{m,0} = 0.2814$).

6 素粒子と初期宇宙

これまでビッグバン宇宙論と呼ばれる宇宙の標準的モデルを見てきたが，この標準モデルでは説明できないことがいくつか出てきた．地平線問題や平坦性問題，そして構造の起源の問題である．これらの問題を一挙に解決する可能性をもった理論が，1980 年代に提案された．それがインフレーション理論である．また第 3 章でビッグバンの 1 万分の 1 秒後（温度 1 兆 K）からの宇宙の歴史を見た．そこでは莫大な光子とニュートリノの海の中にごく少数の陽子，中性子，電子，ミューオンが混じっていた．ではそれ以前の宇宙ではどんな状態だったのだろうか．宇宙の初期に行けばいくほど温度，密度はどんどん上がり，原子核は核子（陽子，中性子）に，核子はそれを構成するクォークへと分解される．こうして宇宙のごく初期には物質の究極の姿である素粒子の世界が現れてくる．したがって初期宇宙を理解するためには，素粒子論の知識が必要不可欠になる．

自然界に起こるあらゆる現象は，つきつめると素粒子間に働く重力，電磁気力，弱い力，強い力の 4 つの力に帰着される．これらの力を 1 つの力の別々の現れ方として説明する力の統一理論は物理学者の夢である．その夢の現実的な第 1 歩が 1970 年代にワインバーグ（S. Weinberg），サラム（A. Salam），グラショウ（G. Glashow）によって踏み出された．彼らは弱い力と電磁気力を，電弱力という一つの力に統一したのである．その後，電弱力と強い力を統一するいくつかの大統一理論が提案され，さらに重力まで統一しようとする試みが現在まで続いている．初期宇宙の理解は，この素粒子論における統一理論の進展と密接に関係している．素粒子論の詳細は他の素粒子物理学の教科書に譲るとして，ここでは電弱理論と大統一理論の概観を述べ，それによって示唆される初期宇宙の様子と，インフレーション理論について詳しく説明しよう．

6.1　素粒子の種類と力

上でも述べたように現在の宇宙には重力，電磁気力，強い力，弱い力の4つの力（相互作用）が存在する．古くから知られているのは重力と電磁気力であるが，20世紀に入り原子の構造が解明されると，この2つの力だけでは原子，原子核レベルのミクロな世界を記述できないことが明らかになった．原子の中心にあり質量のほとんどを担っている原子核は陽子と中性子からできているが，それらを結びつけ原子核をつくる力として強い力が認識された．しかし核子（陽子，中性子）がクォークからできていることが明らかになると，強い力と弱い力はクォーク間に働く力として説明されるようになった．クォークには，アップ（u），ダウン（d），チャーム（c），ストレンジ（s），トップ（t），ボトム（b）の計6種類が存在する（表6.1）．これらをクォークの香（フレーバー）と呼ぶ．各々のフレーバーは3種類の色電荷（カラー）という属性をもっている．強い力は色電荷に働く力，弱い力はフレーバーに働く力である．

表 6.1　フェルミオンの分類
括弧の中は，MeV 単位の質量．

	第 1 世代	第 2 世代	第 3 世代
クォーク	$u(2.33)$	$c(977)$	$t(181000)$
	$d(4.69)$	$s(93)$	$B(3000)$
レプトン	$v_e(?)$	$v_\mu(?)$	$v_\tau(?)$
	$e(0.511)$	$\mu(105.7)$	$\tau(1777)$

これらの力を記述するのが場の量子論である．場の量子論では素粒子は，対応する場の量子的な励起状態として，素粒子間の力は素粒子間をある粒子が交換されることによって生じると表される．基本的な相互作用は，図6.1のファインマン図に示される湯川型というフェルミオンがボソンを放出，あるいは吸収する形である．フェルミオンは，1/2, 3/2という半整数値のスピンをもち，ボソンは0，1，2という整数値のスピンをもつ．フェルミオンにはパウリの排他律が働き，1つの量子状態に1個の粒子しか占めることができない．このことが物質の安定性を保証し，したがって物質はフェルミオンからできている．フェルミオン間にボソンがやり取りされて力が生じるが，フェルミオンのもっ

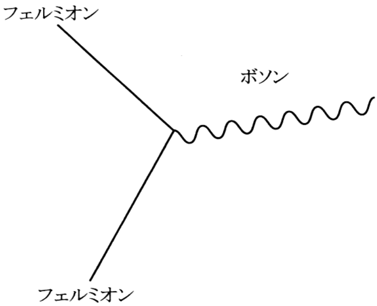


図 6.1 湯川型相互作用

ている属性（電荷，色電荷，弱いアイソスピン，弱い超電荷など）によって交換されるボソンの種類が決まり，それが力の種類を決める．電磁気力は電荷をもった粒子間に，強い力はカラーをもった粒子間に，弱い力は弱いアイソスピン，あるいは弱い超電荷をもった粒子間に働く．重力は特別であらゆる粒子間に働く．それぞれの場合に交換されるボソンは，光子，グルーオン，弱いボソン（W ボソン，Z ボソン），重力子という．

フェルミオンにはクォークのほかにレプトンと呼ばれる一群の素粒子がある．クォークが 6 種類あるのに対応して，レプトンも 6 種類存在する．それらは電子（e），電子ニュートリノ（ν_e），ミューオン（μ），ミューニュートリノ（ν_μ），タウオン（τ），タウニュートリノ（ν_τ）で，表 1 のようにそれぞれ 2 つずつペアになって 3 つの世代をつくる．現在の宇宙は中性子星内部などごく一部を除き第 1 世代のフェルミオンからできているが，宇宙初期には第 2，第 3 世代のフェルミオンも存在した．素粒子同士の反応の多くは同じ世代間で起こることから世代の概念が生まれたが，世代を超えた反応も存在し，それを記述するのが小林・益川理論である．詳細は他の素粒子論の本を参照されたい．ここでは主に第 1 世代だけに話をかぎる．

現在の宇宙では電磁気力と弱い力は全く違う力として認識されている．というのは電磁気力の方が弱い力よりもはるかに強く，また力の到達距離も違っているからである．力には，ある有限の距離で指数関数的に届かなくなるものと，そうでないものがある．前者が弱い力と強い力，後者が重力と電磁気力である．この到達距離の違いは，力を媒介するボソンの質量の違いに帰着される．弱い

力の到達距離は，10^{-16} cm 程度で，質量 M のボソンが力を媒介する場合，不確定性関係から

$$r \simeq \frac{\hbar}{Mc} \simeq 10^{-16}\left(\frac{100\,\mathrm{GeV}}{M}\right)\mathrm{cm} \tag{6.1}$$

となる．したがって弱いボソンの質量は，100 GeV 程度と考えられる．一方，電磁気力を媒介する光子の質量はゼロで，したがって到達距離は無限遠方となる．

素粒子の統一理論の第 1 歩は，この一見非常に違って見える電磁気力と弱い力の統一が成功したことから始まった．この統一はゲージ理論の枠組みの中で行われたので，最初にゲージ理論についてその代表的な例である電磁気力の場合を説明しよう．

6.1.1　ゲージ理論

今，電子しか存在しない宇宙を考えよう．場の量子論では各種の素粒子は対応する場を量子化した結果，場の励起状態として現れる．たとえばスピン 0 の粒子はスカラー場を量子化することで得られ，スピン 1/2 はディラック場，スピン 1 はベクトル場が対応する．

電子はスピン 1/2 をもつのでディラック場 $\psi(x)$ で表される．この場は 4 成分をもち，その満たす方程式は 1932 年，ディラックによって特殊相対論と矛盾しないという要請によって次の形に得られた．

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0 \tag{6.2}$$

ここで m は電子の質量で，γ^μ は以下で説明する 4 行 4 列の行列である．理論が特殊相対論と矛盾しないためには，特殊相対論で成立する運動量と質量の関係 $p^2 = m^2$ を満たす必要がある．このことは，$p_\mu = i\partial_\mu$ とおけば分かるように，どんな場もクライン–ゴルドン方程式

$$\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m^2\right)\psi = 0 \tag{6.3}$$

を満たさなければならないことを意味する．ディラック方程式の左から $i\gamma^\mu\partial_\mu + m$ をかける．するとディラック方程式を満たす場 ψ がクライン–ゴルドン方程式を満たすためには，γ^μ は次の式を満たす必要があることが分かる．

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = -2\eta^{\mu\nu} \tag{6.4}$$

この反交換関係を満たす行列は少なくとも 4 行 4 列で，これをガンマ行列という．ガンマ行列の具体的な形は表現によるが，ここでは具体的な形は必要ではない．ガンマ行列が 4 行 4 列であるので場 ψ は 4 成分をもつ．ディラック方程式は次の形のラグランジアン密度から求められる．

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{6.5}$$

ここで $\bar{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma^{0}$ はディラック共役と呼ばれる（† はエルミート共役を表す）．

さてこのラグランジアン密度を不変にする次のような場に対する変換を考えてみよう．

$$\psi'(x) = \exp(iq\theta)\psi(x) \tag{6.6}$$

ここで q と変換のパラメータ θ は定数である．明らかにこの変換に対して場の方程式は形を変えない．すなわち ψ から新しく定義した場 ψ' も ψ と同じ式を満たす．$\exp(iq\theta)$ の絶対値は 1 なので，この変換は 1 次元ユニタリー群 $U(1)$ の元と考えることができ，この変換を大域的 $U(1)$ 変換という．大域的というのは時空のあらゆる事象で同じ変換パラメータ θ を使うからである．また q を $U(1)$ 電荷という．

ではこのパラメータ θ を時空の各事象で任意に変えてみよう．要するに θ を時空の任意の関数 $\theta(x)$ と考えるのである．すると

$$\psi'(x) = \exp(iq\theta(x))\psi(x) \tag{6.7}$$

この場の変換を局所的 $U(1)$ 変換と呼ぼう．すると新しい場 ψ' の満たす式は以下のようになる．

$$\exp(iq\theta(x))\left[i\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu} + iq\partial_{\mu}\theta(x)\right) - m\right]\psi' = 0 \tag{6.8}$$

こうして以前とは位相因子 θ の微分の項だけ違った方程式が得られる．

ここで次の要請をおいてみる．

場に対して局所 $U(1)$ 変換しても理論は不変である．

これは，変換後の場に対してもラグランジアン密度の形，したがってそれから導かれる場の方程式の形が変わらないということである．

この要請をゲージ原理，この原理を満たす理論をゲージ理論，あるいはゲー

ジ対称性をもつという．今の場合，ゲージ変換が $U(1)$ 群の要素なので電磁気学は（局所）$U(1)$ ゲージ理論であるという．場に対する変換の全体がつくる群をゲージ群といい，今の場合は $U(1)$ がゲージ群である．

ゲージ原理を満たすには余分に出てきた位相因子の微分を打ち消せばよい．そこでベクトル場 A_μ を導入して，ディラック方程式の中の微分を

$$D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu \tag{6.9}$$

に変えた次の方程式を考えてみよう．

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\,\psi = 0 \tag{6.10}$$

ここでベクトル場 A_μ は局所 $U(1)$ 変換に対して次のように変換するとする．

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\theta \tag{6.11}$$

すると変換した場 ψ' の満たす式が

$$\left[i\gamma^\mu\left(\partial_\mu - iqA'_\mu\right) - m\right]\psi' = 0 \tag{6.12}$$

となって変換の前後で方程式の形が変わらないことが分かる．ここで導入された微分はゲージ変換に対して共変的に（形を変えずに）変換するので共変微分という．また共変微分をつくるために導入されたベクトル場をゲージ場という．

したがってゲージ原理が成り立つには次のラグランジアン密度を考えればよいことになる．

$$\mathcal{L}_{QED} = i\bar{\psi}\left[\gamma^\mu\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right) - m\right]\psi + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{6.13}$$

最後の項は，ゲージ場の運動エネルギーである．ただし，$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ はゲージ場の強さ，あるいは曲率と呼ばれる量で，ゲージ変換に対して不変量である．

ここで注意すべきことはゲージ場の質量項はラグランジアンの中で

$$M_A^2 A_\mu A^\mu \tag{6.14}$$

のように書けるが，この項はゲージ不変ではないことである．したがってゲージ場は質量をもってはいけないことが分かる．すなわち A_μ は質量ゼロの光子場を表すことが分かる．またゲージ対称性から場同士の相互作用の形が

$$q\bar{\psi}A_\mu\psi \tag{6.15}$$

と q を結合定数としてもつ湯川型に決まる．こうして 局所 $U(1)$ ゲージ不変性の要請から，量子電磁力学のラグランジアンが自然に導かれることが分かる．

6.1.2 自発的対称性の破れと統一理論

では弱い力は，ゲージ不変性の要請と両立するだろうか．弱い力は短距離力であるため，力を媒介するボソンは 100 GeV 程度の質量をもつことが示唆された．また上からゲージ理論ではゲージ粒子の質量はゼロでなければならないことが導かれた．したがって弱い力はゲージ理論では記述できないと思うかもしれない．ところがヒッグス粒子と呼ばれるスカラー場を導入することで，ゲージ不変性を破ることなくゲージ場の質量を導入することができる．これをヒッグス機構（メカニズム）という[*1)]．ヒッグス機構によって弱い力がゲージ理論で記述できるなら，電磁気力もゲージ理論として記述できるので，これらの力が統一できるという期待ができる．

ヒッグス機構は自発的対称性の破れ[*2)]という概念が用いられるので，まずそれをはじめに説明しておこう．今，次のようなラグランジアンをもつ複素スカラー場 Φ を考える．

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\eta^{\mu\nu}\ \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi - V(\Phi)\right] \tag{6.16}$$

スカラー場のポテンシャル $V(\Phi)$ として以下の形を仮定する．

$$V(\Phi) = \lambda(|\Phi|^2 - v^2)^2 \tag{6.17}$$

場の理論では真空状態はエネルギーが最小になる状態だからスカラー場に関しては，$|\Phi| = v$ のときとなる．スカラー場 $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$ として実数成分 Φ_1，純虚数成分 Φ_2 を考えると，この条件は $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 = v^2$ となり，これは (Φ_1, Φ_2) 平面で半径 v の円を決めている．したがって理論はこの平面内の回転に対して対称性をもっている．これは理論が次の大域的なゲージ対称性をもつことと同じである．

$$\Phi'(x) = \exp(iq\theta)\Phi(x) \tag{6.18}$$

実際，この変換に対してラグランジアンは明らかに形を変えない．さて場のエネルギーが最低になる値（真空期待値）は，$\Phi_1^2 + \Phi_2^2 = v^2$ を満たせばどこでもよいが，たとえば $(v, 0)$ としてみよう．そしてスカラー場を v からの微小な揺

---

*1) 2013 年のノーベル物理学賞が P. W. Higgs を含む 3 氏に与えられた．受賞理由は，このヒッグス機構を理論的に発見し，実際にヒッグス粒子が検出されたことである．

*2) 1960 年代に南部陽一郎らが提唱した．

らぎ ϕ として次のようにおいてみる.

$$\Phi = v + \phi_1 + i\phi_2 \tag{6.19}$$

ϕ_1, ϕ_2 が量子化されるべき場であるので，これらの場を用いて上のラグランジアンを書き換えてみると次のようになる.

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}\partial^\mu \phi_1 \partial_\mu \phi_1 - 2\lambda v^2 \phi_1^2}_{①} \underbrace{+\frac{1}{2}\partial^\mu \phi_2 \partial_\mu \phi_2}_{②} \underbrace{-2\lambda v \phi_1 (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2}_{③}$$

この①は質量 $4\lambda v^2$ をもったスカラー場 ϕ_1，②は質量 0 のスカラー場 ϕ_2，そして③はそれらの相互作用を表している．さらにこのラグランジアンでは，もともとのラグランジアンのもっていた $U(1)$ 対称性が全く見えない．これは真空状態としてたまたまある特別な配置を選んだからであり，この真空から見ると対称性が隠れてしまったのである．もともとのラグランジアンにあった対称性が，ある特定の真空を選ぶことによって破れることを，自発的対称性の破れという．ここで質量 0 の場 ϕ_2 は場の空間の円周方向の運動のモードで，もともとラグランジアンがもっていた対称性の現れである．一般に連続なパラメータ（上の例では θ）で表される大域的対称性が自発的に破れると，このような質量 0，スピン 0 の粒子が現れる．この粒子を南部–ゴールドストーン粒子という．

次に局所 $U(1)$ ゲージ理論に対して自発的対称性の破れを適用してみよう．これは次のラグランジアンを考えるということである．

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\, i\bar{\psi}\left[\gamma^\mu\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right) - m\right]\psi + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &- \frac{1}{2}\left[\eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right)\Phi^*\left(\partial_\nu + iqA_\nu\right)\Phi - V(\Phi)\right]\end{aligned} \tag{6.20}$$

ここでポテンシャル $V(\Phi)$ は上と同じである．したがって真空では $|\Phi| = v$ となる．大域的対称性との違いは変換のパラメータ $\theta(x)$ が時空の任意の関数だから，時空の各点で θ を適当に選ぶことにより，いたるところでスカラー場を実数場にとることができる．するとスカラー場は次のように実数の真空期待値 v からの微小な実数場の揺らぎ ϕ として表すことができる．

$$\Phi = \Phi_1 = v + \phi \tag{6.21}$$

この場 ϕ を用いて上のラグランジアンのスカラー場の部分を書き換えてみると

次のようになる.

$$\mathcal{L}_{\rm H} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - 2\lambda v^2\phi^2 - 2\lambda v\phi^3 - \frac{\lambda}{2}\phi^4 + \frac{1}{2}q^2 v\phi A^\mu A_\mu + \frac{1}{2}q^2 v + \phi^2 A^\mu A_\mu + \frac{1}{2}v^2 q^2 A^\mu A_\mu \quad (6.22)$$

これは質量 $4\lambda v^2 > 0$ をもったスカラー場 ϕ が自己相互作用やゲージ場との相互作用をしているラグランジアンであり，そのほかに最後の項はゲージ場について 2 次，すなわちゲージ場の質量項である．こうしてゲージ理論に自発的対称性の破れを適用することで，ゲージ場に質量を与えることができる．これをヒッグス機構といい，そのときのスカラー場をヒッグス場と呼ぶ．ゲージ場が質量をもつことで自由度が 2 から 3 に増えたが，この増えた分はもともと南部–ゴールドストーン粒子の自由度であったと考えることができる．

実際の電弱力におけるヒッグス機構については，他の本を参照されたい．

6.1.3 素粒子の標準理論

弱い力を記述するラグランジアンは，アップクォークとダウンクォークのペアや電子と電子ニュートリノのペアが対象であるので，それらのペアを組にして 2 成分をもった 1 つの場と考える．したがって場の空間は 2 次元ベクトル空間と考えることができ，その空間の回転を考えることができる．この回転に対してラグランジアンの不変性を要請する．2 次元空間の回転は，群 $SU(2)$ で表されるので，弱い力は $SU(2)$ ゲージ理論として記述される．実際にはそれほど単純ではなく，弱い相互作用は場の左巻き成分にしか作用しないことが実験的に確かめられている．スピン 1/2 のフェルミオンは，スピンが運動量方向かその逆かで，それぞれ右巻き，左巻きと呼ばれる．ディラックフェルミオンは，左巻き成分と右巻き成分の和と表すことができる．

$$\psi = \psi_L + \psi_R \qquad (6.23)$$

このように分解すると，弱い力は ψ_L にしか働かない．残り右巻き成分は電磁気力を受けるが，左巻き成分も同様に電磁気力を受ける．そこでクォークとレプトンを次のような組み合わせで考える．

$$q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad u_R, d_R \tag{6.24}$$

$$\ell_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad e_R \tag{6.25}$$

ニュートリノは 0.1 eV 以下の質量をもっていることが知られているが，ここでは簡単のため質量をもたず左巻き成分しかないとする．

この左巻き場に対して作用するのが 2 行 2 列のユニタリー行列で行列式が 1 の $SU(2)$ である．$SU(2)$ の元は，$\tau_a\,(a = 1, 2, 3)$ をパウリ行列

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{6.26}$$

を用いて，

$$U(\lambda_a) = \exp\left[ig\tau_a\lambda^a\right] \tag{6.27}$$

と表すことができる．したがって $\lambda_a\,(a = 1, 2, 3)$ を時空の任意の関数として次のような場の変換を考えることになる．

$$q'_L \to q_L \exp\left[ig\tau_a\lambda^a(x)\right], \ \ \ell'_L \to \ell_L \exp\left[ig\tau_a\lambda^a(x)\right] \tag{6.28}$$

このゲージ変換に対して理論を不変にするには，次のような共変微分を導入すればよい．

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\sum_{a=1}^{3} W_\mu^a \tau_a \tag{6.29}$$

ここで $U(1)$ ゲージ理論の場合とは違い，$SU(2)$ 行列の独立成分が 3 であることから，3 つのゲージ場 $W_\mu^a\,(a = 1, 2, 3)$ が導入される．ここでレプトン部分のラグランジアンの運動エネルギー項

$$\bar{\ell}_L \gamma^\mu D_\mu \ell_L \tag{6.30}$$

の中でゲージ場に関係する項を取り出してみよう．

$$
\begin{aligned}
&\bar{\ell}_L \gamma^\mu \sum_{a=1}^{3} W_\mu^a \tau_a \ell_L \\
&= (\bar{\nu}_e,\, \bar{e})_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2}W_\mu^+ \\ \sqrt{2}W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \\
&= \sqrt{2}\left[(\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu e_L)W_\mu^+ + (\bar{e}_L\gamma^\mu \nu_{eL})W_\mu^-\right] + \left[(\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu \nu_{eL}) + (\bar{e}_L\gamma^\mu e_L)\right] W_\mu^3
\end{aligned}
\tag{6.31}
$$

ここで

$$
W_\mu^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W_\mu^1 \mp W_\mu^2\right) \tag{6.32}
$$

これから $W^\pm$ は ν_e を e_L に，e_L を ν_e に変えるゲージ粒子，W_μ^3 は電荷の移動を伴わず e_L を e_L に，ν_e を ν_e に変えるゲージ粒子であることが分かる．しかし W_μ^3 は左手成分だけに作用し，また中性のニュートリノとも作用するので，電磁気力を媒介する光子場と考えることはできない．そこで光子場を導入するために $U(1)$ ゲージ群とゲージ場 B_μ を導入する．そして W_μ^3 と B_μ を適当に組み合わせて光子場 A^μ をつくる．上で導入した $U(1)$ 対称性は弱い超電荷 Y と呼ばれる量子数の保存を表すので，$U_Y(1)$ と書く．一方，残った 3 つのゲージ場 W_μ^1, W_μ^2 と W_μ^3 と B_μ の別の組合せ（これを Z^μ と書く）が残るが，この 3 つのゲージ場だけに質量をもたせるようにヒッグス場を導入することで弱い力を記述する．この Z 粒子は電荷をもたず中性なので，その相互作用を中性カレントという．こうして 2 つのゲージ群 $SU(2)_L$ と $U(1)_Y$ をもったゲージ理論を，$U(1)_{\mathrm{EM}}$ 対称性（電磁相互作用の $U(1)$ 対称性）だけを残すようにヒッグス機構で自発的に破ることで，電磁気力と弱い力が統一的に理解される．

このことを次のように書く．

$$
SU(2)_L \times U(1)_Y \to U(1)_{\mathrm{EM}} \tag{6.33}
$$

この理論の正しさは 1989 年に中性カレントの存在が確認されて検証され，グラショウ，ワインバーグ，サラムがノーベル賞を受賞した．

強い力はクォークのもつ色電荷をやり取りする．色電荷は 3 種類あるので 3 成分のフェルミオン場を考えて，仮想的な 3 次元空間内のベクトルと見なし，この空間内の任意の回転に対して理論が不変とする．3 次元空間の回転は群 $SU(3)$

で表されるので，強い力は $SU(3)_c$ ゲージ理論として記述される．添え字 c をつけたのは色電荷に対する対称性という意味である．$SU(3)$ の独立な成分が 8 個あることからこの理論のゲージ場は 8 個あり，グルーオン場と呼ばれる．強い力も弱い力と同様，短距離力であるが，これはグルーオンが質量をもっているからではなく，グルーオン自身のもつ色電荷でお互いに相互作用するためである．

こうして強い力，弱い力と電磁気力は自発的に対称性の破れた $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ理論として記述される．これを素粒子の標準理論というが，この 3 つのゲージ群にそれぞれに力の強さを特徴づける結合定数がある．この意味では標準理論は真の意味で 3 つの力を統一したというわけではない．しかし 2012 年の段階でヒッグス粒子の存在が加速度実験によりほぼ確認されたことは標準理論の正当性を強く支持している．

6.2　素粒子論から予想される宇宙初期の出来事

標準理論では 3 つの力を 3 つのゲージ群によって記述したが，3 つのゲージ群を部分群として含むより大きな 1 つの群を考えることができる．そのような群をゲージ群とし適当なヒッグス粒子を導入して自発的にゲージ対称を破ることで 3 つの力を真に統一する理論を，大統一理論という．実際に 3 つの力が非常に高いエネルギースケールで統一される可能性は，3 つの力の結合定数のエネルギー依存性を調べることから示唆される．場の量子論では電荷や質量といったパラメータが，量子効果によってエネルギー依存性をもつ．たとえば電磁気力の強さを決める結合定数は，相互作用でやり取りされる 4 元運動量（の大きさ）を q とすると次のような依存性をもつ．

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - \frac{\alpha(\mu^2)}{\pi}\log\frac{q^2}{\mu^2}} \tag{6.34}$$

この式は違った 4 元運動量 μ と q での結合定数を結びつけている．たとえば $\mu \simeq 1$ MeV という低エネルギー領域では $\alpha(\mu^2) \simeq 1/137$ である．この式から電磁気力はエネルギースケールが大きくなる（あるいは小スケールになる）とともに徐々に強くなってくる．同様に弱い力の結合定数もエネルギースケールとともに大きくなる．大きくなり方は電磁気力の場合より大きく，約 100 GeV

で両者の値は一致する．一方，強い力の結合定数は逆にエネルギースケールが大きくなると小さくなり，強い力は徐々に弱くなる．そして3つの力の結合定数は，10^{15} GeV 程度でほぼ一致することが分かる．このことは3つの力はこの程度のエネルギーで同じ力になることを示唆しているのである．実際に大統一理論が存在するのか，存在したとすると大統一群（大統一理論のゲージ群）は何かはまだ分かっていないが，大統一理論が存在すれば，必然的にバリオン数が保存しなくなる．これは大統一理論ではクォークとレプトンを一まとめにして扱うからである．一番，簡単な大統一群として5次元のユニタリー群 $SU(5)$ を考えれば，その5次元表現（の複素共役表現）を次のように選ぶことができる．

$$f_L = \begin{pmatrix} d^c_Y \\ d^c_G \\ d^c_R \\ e_L \\ -\nu_e \end{pmatrix} \tag{6.35}$$

c は荷電共役を表すが，本書の範囲ではこの詳しい内容を知る必要はなく，クォークとレプトンが1つの多重項の中に入っていることが重要である．ほかの粒子は10次元表現に当てはめるが，詳細は省く．この5次元空間の回転を表すのが $SU(5)$ で，対応する24のゲージ場が存在するが，そのうちの8つは色電荷をやり取りするグルーオンで上の表現で d クォーク間に作用する．また電子とニュートリノ間に作用するのが，電弱力を媒介する4つの弱いゲージボソン，そして残りの12個は d クォークと電子，ニュートリノ間に作用し，クォークをレプトンに，レプトンをクォークに変換する．したがってたとえば次のような反応によって陽子は電子に崩壊してしまう．

$$\mathrm{p} \to \pi^0 + \mathrm{e}^+ \tag{6.36}$$

この反応は陽子の中の2個のアップクォークが，陽電子と反ダウンクォークに変わったり，アップクォークとダウンクォークが陽電子と反アップクォークに変わることによって起こる．陽子の崩壊は観測されていないので，この反応が起こるとしても極めて小さい確率，あるいは陽子の寿命が非常に長いということである．このためにはこの反応に介在するゲージボソンの質量が非常に大きくなければばならない．陽子崩壊の観測は1980年代からはカミオカンデなどで

行われており，まだ観測されていない．このことからゲージボソンの質量や大統一理論に対して厳しい制限が得られており，すでに $SU(5)$ 大統一理論は棄却されている．大統一理論は，フェルミオンとボソンの自由度に1対1の対応を要求する超対称性をもった理論に拡張されている．超対称性をもつ理論では，たとえばフェルミオンであるクォーク（スピン 1/2）に対応してスピン0のボソン（スクォークと呼ばれる）が存在し，スピン1の光子に対応するスピン 1/2 のフェルミオン（フォティーノという）が存在する．超対称性を入れることで，3つの力の結合定数はあるエネルギーで正確に一致することは示されること，電弱スケールと大統一スケールの大きな隔たりを自然に説明できること，超対称性理論の中に暗黒物質の候補となり得る粒子が自然に含まれること，重力まで含めたすべての力の統一を考えるとき重要な役割を果たす可能性があることなどから，超対称性が存在すると考えている研究者が多いが 2013 年現在まだ発見されていない．ただ現在の宇宙では超対称性は成り立っておらず，現在観測されている粒子に対する超対称性パートナーは見つかっていない．したがて宇宙初期のある時点で超対称性が破れたとされるが，その詳細はよく分かっていない．

6.2.1 バリオン数非対称性の起源

陽子崩壊はバリオン数を保存しない反応である．このことは正のバリオン数が生成されることも意味している．宇宙論の未解決問題の1つになぜ現在の宇宙は物質（バリオン）だけで反物質（反バリオン）が存在しないのかという問題がある．宇宙のごくごく初期の超高温，超高密度ではバリオンと反バリオンが同数存在したはずである．すると宇宙の温度が下がるにつれバリオンと反バリオンが対消滅して現在の宇宙には，物質も反物質も存在しない空虚な宇宙になっていると結論される．現実の宇宙には数十億個の光子に対して約1個のバリオンが存在し，星や惑星，そして私たちをつくっている．このことは宇宙初期にバリオンは反バリオンに対して数十億分の1程度多く存在したということである．いつバリオンと反バリオンの間にこのような微小な差ができたのだろうか．これがバリオン数非対称性の問題である．バリオン数非対称性を説明するためには，サハロフの条件と呼ばれる次の3つの条件が必要である，

サハロフの 3 条件

①バリオン数を保存しない反応が存在すること

②C, CP 対称性がともに破れていること

③熱平衡からのずれがあること

ここで C とは荷電共役（電荷の符号の入れ替え），P は空間反転を表す．したがって CP 対称性とは電荷の符号を反対にし，さらに空間反転しても理論は変わらないということである．条件①はそもそもこのような反応がなければバリオン数がない状態から有限のバリオン数をつくるために明らかに必要な条件である．条件②は，C，CP 対称性が成り立っていると，バリオン数を保存しない反応があっても，それと全く同じ確率で逆反応が存在することになって正味のバリオン数ができないからである．条件③は粒子と反粒子の質量が同じことから熱平衡状態では粒子と反粒子が同数存在するからである．

1980 年代に吉村太彦は大統一理論はこの①の条件を満たし，さらに②の条件も満たす可能性があることから，宇宙初期でバリオン数非対称性の起源の具体的なモデルを初めて提唱した．これは次に述べるインフレーション理論の提唱と並んで，素粒子物理学が宇宙論，とくに初期宇宙を理解するのに不可欠であることを強く印象づけた．

後で述べるがインフレーション膨張の後に膨張のエネルギーを解放して宇宙を加熱するが，再加熱の温度が大統一理論が実現されるほどの高温度になるとグラビティーノと呼ばれる粒子が過剰に生成されて，その後の宇宙の進化に大きな影響を与えてしまう可能性が指摘されている．したがって現実の宇宙では大統一理論が実現しない可能性があり，バリオン数非対称性の生成は未解決である．1 つの可能性として電弱力が電磁気力と弱い力に分離する際にバリオン数を保存しない反応が存在することが知られており，詳しく調べられている．

6.2.2　真空の相転移と位相欠損

力の統一を説明するのに必要なヒッグス粒子は，宇宙の進化にも大きな影響を与える．ヒッグス粒子が空間に凝縮するのは，そのポテンシャルの形がワインボトルの底のように中心（場の値がゼロ）で高く有限の場の値で最小値をもつからである．しかしこのポテンシャルの形は環境（温度や密度）の影響を受けて変化する．高温では粒子の熱運動が大きくなり，ポテンシャルの底から飛

び出してくることが可能だからである．この影響はたとえば温度の場合はヒッグス場のラグランジアンに $T^2\phi^2$ に比例した項として取り入れることができる．こうして温度が十分高くなるとポテンシャルの形は中心が最小値をもつようになる．このことは凝縮していたヒッグス粒子が蒸発することを意味し，ヒッグス粒子によって質量を得ていた粒子の質量がゼロになる．こうして宇宙の進化について次のような描像ができあがる．仮にビッグバン理論が予言するように過去にさかのぼって温度が無限に上昇すると，10^{15} GeV 程度以上の宇宙では大統一理論が実現し力は重力と大統一力しか存在せず，すべてのフェルミオンの質量はゼロでクォークとレプトンの区別はない．10^{15} GeV 程度以下に温度が下がると大統一力は強い力と電弱力に分離し，クォークとレプトンは違う粒子として振舞うようになる．さらに温度が下がって，100 GeV 程度になると電弱力が弱い力と電磁気力に分離して，光子だけが質量をもたずに残る．さらに温度が下がって 300 MeV 程度になると，それまで自由に運動していたクオークが結びついてハドロン（陽子，中性子，中間子など）をつくる．

こうして素粒子の統一理論は宇宙の進化と深く結びついているのである．さらに力の分化が起こるときヒッグス粒子が空間に凝縮するが，この凝縮は空間全体で一挙に起こるわけではない．ヒッグス粒子はスカラー粒子ではあるが内部自由度をもっているためエネルギーは最小でも内部空間でいろいろな方向をとることができる．たとえば電弱力の場合のヒッグス粒子は弱いアイソスピンの 2 重項であり 2 次元の弱いアイソスピン空間のベクトルとみなされる．真空の相転移が起こったとき因果関係の及ぶ範囲でヒッグス粒子は内部空間中で一斉に同じ方向を向いて凝縮する．すでに述べたように宇宙初期には因果関係をもたないたくさんの領域が存在した．したがって真空の相転移が起こると宇宙の中で内部空間の違う方向にそろったヒッグス粒子の領域がたくさんできることになる．違った方向にそろった領域と領域の間は，相転移が起こる前の真空のままでしたがってエネルギーが高い．このような領域は位相欠損と呼ばれる．位相欠損の形は，理論の詳細により点状（磁気単極子），ひも状（宇宙ひも），面状（宇宙壁），それらとは違ってはっきりした形をもたないテクスチャーと呼ばれるものがある．磁気単極子（モノポール）以外のものは宇宙マイクロ波背景放射に観測可能な特有の温度揺らぎを引き起こすが，そのような揺らぎが観測されていないことからこれらの位相欠損は，大量には存在しないと考えられ

ている．磁気単極子は大統一理論が自発的に破れたときに現れることが知られているが，その質量は v を真空期待値として $M \simeq 4\pi v/e$ と評価される（e は電気素量）．大統一理論の場合，真空期待値は $10^{15}\,\mathrm{GeV}$ 程度なので，質量は $M \simeq 10^{16}\,\mathrm{GeV} \simeq 10^{-8}\,\mathrm{g}$ となる．この磁気単極子が大統一理論が自発的に破れる時期の地平線領域に 1 個づつ存在し，その後の膨張でその数はほとんど変わらない．

こうして磁気単極子の数は，大統一理論が自発的に破れたときに宇宙の中にどれくらい因果的に無関係の領域が含まれているかによって決まる．大ざっぱにこれを評価してみよう．宇宙初期は放射優勢であるから，$a(t) \propto t^{1/2}$，したがって地平線距離は

$$\ell(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = 2t \tag{6.37}$$

この距離は宇宙膨張にしたがって大きくなるわけであるが，これは現在の宇宙の大きさ（観測範囲）よりもはるかに小さい．実際，どのくらい小さいかは，現在の宇宙の大きさに広がった同じ時刻 t での距離 $L(t)$ と比較してみればよい．今，宇宙は断熱膨張したとすればエントロピーが保存する．エントロピーは温度の 3 乗に比例し，温度はスケール因子に反比例するから，$L(t)$ と現在観測できる宇宙の大きさ（半径）$L_0 \simeq 10^{10}$ 光年 との関係は次式で与えられる．

$$L(t) = \left(\frac{s_0}{s(t)}\right)^{1/3} L_0 \tag{6.38}$$

ここで $s(t)$ は時刻 t でのエントロピー密度，s_0 は現在のエントロピー密度である．したがって体積の比は

$$\frac{\ell^3}{L^3} \simeq \left(\frac{45}{4\pi^3}\right)^{3/2} g^{-1/2} \left(\frac{M_{\mathrm{pl}}}{L_0 T_{\mathrm{CMB}} T}\right)^3 \simeq 4 \times 10^{-89} g^{-1/2} \left(\frac{M_{\mathrm{pl}}}{T}\right)^3 \tag{6.39}$$

となる．ここで放射優勢時のフリードマン方程式と断熱膨張 $a(t) \propto T^{-1}$ から

$$\left(\frac{\dot{T}}{T}\right)^2 = A^2 \frac{T^4}{M_{\mathrm{pl}}^2} \tag{6.40}$$

であり，これから導かれる温度と時刻の関係を用いた．

$$T^2 = \frac{M_{\mathrm{pl}}}{2At} \tag{6.41}$$

ここで $A^2 = (4\pi^3/45)g(T)$ とおいた．

この式から大統一理論が実現されるような温度 $T \simeq 10^{16}\,\mathrm{GeV}$ を考えれば，$g \simeq 100$ 程度だから $\ell_0^3/L_0^3 \simeq 10^{-80}$，すなわち現在観測される宇宙には，$10^{80}$ 程度の磁気単極子があることになる．磁気単極子 1 個の質量は重たいから，もし宇宙にこれだけの磁気単極子があったとすれば宇宙ははるか昔に潰れていたことになる．

6.3 インフレーション理論

大統一理論が提唱された 1980 年代に，大統一理論のヒッグス場のポテンシャルエネルギーが宇宙を急激に膨張させる可能性が，佐藤勝彦，アラン・グースなどによって指摘された．上にも述べたように宇宙の温度が $10^{15}\,\mathrm{GeV}$ 程度以上では対称性が回復されておりヒッグス場はポテンシャルの原点付近を振動していた．この原点は自発的対称性が破れた後のポテンシャルの最小値よりもエネルギーが高く，したがってこのエネルギーが宇宙を支配していたとし，それによって宇宙は指数関数的に膨張したとするのである．指数関数的な膨張は標準的なビッグバン宇宙論では初期条件として仮定せざるを得なかった地平線問題や平坦性問題が解決できるので，一躍注目を浴びその後の宇宙論に大きな影響を与えた．

6.3.1 なぜインフレーションが必要か？

まずビッグバン理論で説明できなかった地平線問題や平坦性問題がインフレーション理論でどのように解決されるか，佐藤勝彦とともにインフレーション理論の提唱者の一人であるグース（A. Guth）の議論に沿ってエントロピーの観点から見てみよう．地平線問題は上で見たので平坦性問題を取り上げる．平坦に限らないフリードマン方程式は

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{6.42}$$

と書ける．現在の観測では宇宙はほぼ平坦であるから，曲率は

$$\frac{k}{a_0^2 H_0^2} = \frac{\rho_0}{\rho_{\mathrm{cr},0}} - 1 < 0.1 \tag{6.43}$$

仮に宇宙が閉じているとしよう．したがって以下，$k = 1$ を考える．すると，

上の式から $1/H_0$ は現在の観測可能な大きさを決めているから，宇宙の a_0 は曲率半径と考えることができる．宇宙が断熱膨張しているとすれば，s をエントロピー密度として

$$\frac{d}{dt}(sa^3) = 0 \tag{6.44}$$

である．現在の宇宙のエントロピーのほとんどはCMB放射が担っている．宇宙の曲率半径以内のエントロピーは

$$S \simeq \frac{4\pi^2}{45} T_{\rm CMB}^3 a_0^3 > \frac{10^{3/2}}{H_0^3} \frac{4\pi^2}{45} T_{\rm CMB}^3 \simeq 10^{87} \tag{6.45}$$

という莫大な数になる．フリードマン方程式から

$$1 - \frac{\rho_{\rm cr}}{\rho} = \frac{45}{4\pi^3} \frac{M_{\rm pl}^2}{g(T)T^4} \frac{1}{a^2} \tag{6.46}$$

この右辺を保存するエントロピーを使い書き直すと，$S(T) = (2\pi^2/45)g(T)T^3a^3$ だから

$$1 - \frac{\rho_{\rm cr}}{\rho} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{45}{2\pi^2}\right)^{1/3} g(T)^{-1/3} S^{-2/3} \frac{M_{\rm pl}^2}{T^2} < 10^{-60} g(T)^{-1/3} \frac{M_{\rm pl}^2}{T^2} \tag{6.47}$$

となる．$T \simeq 10^{16}\,\text{GeV}$, $g \simeq 100$ を考えると，

$$\left|1 - \frac{\rho_{\rm cr}}{\rho}\right| < 10^{-54} \tag{6.48}$$

となる．こうしてCMBが莫大なエントロピーをもつことが，平坦性問題，そして地平線問題の原因であることが分かる．

CMBが莫大なエントロピーをもつからといって，すぐにそれが平坦性問題，地平線問題につながるわけではない．上の計算でも分かるように宇宙が断熱膨張をし，エントロピーが保存することが仮定されていた．したがって初期宇宙のある段階でエントロピーが保存しなければ平坦性問題，地平線問題を避けることができる．そこでエントロピーが保存する代わりに

$$S_0 = Z^3 S_i \tag{6.49}$$

として宇宙初期のある時期でのエントロピーを S_i としよう．Z はある莫大な数である．今，初期時刻 $T_i \simeq 10^{16}\,\text{GeV}$ とすれば，上の式からもし

$$Z \simeq 10^{26} \tag{6.50}$$

程度なら $|1-\rho/\rho_{\rm cr}|=O(1)$（1 の程度の量）となることが分かる．この程度の Z の値で地平線問題も解決されることも分かる．この Z の数値は，$S_i=O(1)$ に対応する自然な数値であることも分かるだろう．

さて宇宙初期にこのような莫大なエントロピーを生成するメカニズムが，インフレーション膨張と呼ばれる宇宙の加速膨張である．標準的なビッグバン宇宙論では CMB の温度は初期ほど単調増加で高くなっている．ここで初期のある時期に温度が急激に下がり，その後，温度が上がったとしてみる（これを宇宙の再加熱という）．下がった温度を T_c，その後に上がった温度を T_r とすると，エントロピー密度は，その間に $(T_r/T_c)^3$ だけ増加する（正確にはスピン自由度の変化の寄与があるが，ここでは簡単のために無視する）．再加熱はごくごく短時間で起こり，この間スケール因子はほぼ変化しないとすると，

$$Z \simeq \frac{T_r}{T_c} \tag{6.51}$$

となり，再加熱で温度が約 28 桁上昇すると，平坦性問題や地平線問題を解決するのに必要なエントロピーが生成されることが分かる．佐藤やグースは，このことが宇宙のごく初期，大統一ゲージ対称性が自発的に破れる際に起こる可能性を指摘した．大統一理論で現れるヒッグス粒子のポテンシャルは，10^{15} GeV 程度の場の値で最小値をもつが，宇宙の温度の低下とともにスムーズにこの値に落ち着かず，場の配位空間の原点に留まるとすれば，その間，宇宙はヒッグス粒子のポテンシャルエネルギー密度 $V(0)$ をもつことになる．

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho + V(0)\right) \tag{6.52}$$

いったん $V(0) \gg \rho$ という状況が実現すると，この方程式の解は

$$a(t) \propto e^{Ht} \tag{6.53}$$

となる．ここで $H^2 = 8\pi G V(0)/3$．このとき温度は，$T \propto e^{-Ht}$ となり指数関数的に減少する．したがって $Ht \geq 60$ で地平線問題や平坦性問題が解決される．したがって

$$\Delta t \simeq \left(\frac{M_{\rm pl}}{M_{\rm inf}}\right)^2 \frac{60}{M_{\rm pl}} \simeq 10^{-35}\left(\frac{10^{15}\,{\rm GeV}}{M_{\rm inf}}\right){\rm s} \tag{6.54}$$

程度の時間だけ指数関数的に膨張すればよい．ここでインフレーションが起こ

るエネルギースケールを $V^{1/4} = M_{\rm inf}$ とおいた．また $M_{\rm pl} = 1/\sqrt{8\pi G} \simeq 2.4 \times 10^{18}\,{\rm GeV}$ は重力定数，プランク定数，光速度で決まるエネルギーでプランク質量と呼ばれる（一般には 8π を除いたものをプランク質量と定義するが，この章では上で定義された質量をプランク質量と呼ぶ）．

6.3.2 インフレーションモデルの例

最初に提唱されたヒッグス粒子によるインフレーション理論は，インフレーション膨張を自然に終わらせることが難しいことが分かり，その後，インフレーション膨張を起こす粒子を独立に想定するようになった．この粒子をインフラトンという．インフラトンは現在の素粒子の標準理論の中では対応する粒子が見当たらないが，前に触れた超対称性理論や重力まで含めたあらゆる力の統一理論ではいくつかのスカラー粒子が自然に現れ，その中に対応する粒子があると期待されている．

インフレーションを起こすスカラー場のモデルは多数存在するが，エッセンスは一番簡単で単純な場合で説明することができる．そこでここではそのようなモデルとして，次の作用を持つ単一のスカラー場 ϕ をインフラトンと仮定する．

$$S_\phi = \int \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)\right]d^4x \tag{6.55}$$

このスカラー場のストレス・エネルギーテンソルは定義に従って計算すると

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial^\alpha\phi\partial_\alpha\phi + V(\phi)\right) \tag{6.56}$$

したがってエネルギー密度と圧力は

$$\rho_\phi \equiv -T^0_0 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) \tag{6.57}$$

$$p_\phi \equiv \frac{1}{3}T^k_k = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{6}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) \tag{6.58}$$

これから

$$\rho_\phi + 3p_\phi = 2\left(\dot{\phi}^2 - V(\phi)\right) \tag{6.59}$$

となるから，もし運動エネルギー項 $\dot{\phi}^2$ が十分小さければ，加速膨張の条件を満たしインフレーションが起こる．宇宙膨張によってスカラー場の運動は抵抗を受けるので，このような状況は比較的簡単に実現できる．実際，スカラー場

の運動方程式は

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \tag{6.60}$$

となるが，左辺第 2 項が宇宙膨張による減衰項と解釈できる．

ここでは例としてカオティックインフレーションとして知られるポテンシャルに質量項だけをもったモデルを考えよう．

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{6.61}$$

このポテンシャルは原点（$\phi = 0$）に最小値をもつが，一般にインフレーション膨張が起こるような宇宙のごく初期には大きな量子揺らぎによって場は空間の各点でランダムな値をもっていると考えられる．その中には場の値がプランクスケール以上になる領域もあるだろう．実際，ポテンシャルエネルギーがプランクエネルギー以下であるという条件 $m^2\phi^2 \leq M_{\rm pl}^4$ から $m \ll M_{\rm pl}$ として $\phi \simeq M_{\rm pl}^2/m \gg M_{\rm pl}$ が得られる．インフラトンはポテンシャルの傾きによって原点方向に運動する．まずこの運動が宇宙膨張による減衰項により非常にゆっくりとしているとしよう．この仮定の正当性は後で検証する．したがってインフラトン場の運動エネルギーは無視できて，運動は次の方程式系で記述できる．

$$3H\dot{\phi} + m^2\phi = 0 \tag{6.62}$$

$$H^2 = \frac{4\pi m^2\phi^2}{3M_{\rm pl}^2} \tag{6.63}$$

スカラー場の運動方程式で 2 階微分を無視する近似をスローロール近似という．このとき解は

$$\phi(t) = \phi_i - \frac{1}{2\sqrt{3\pi}}mM_{\rm pl}(t - t_i) \tag{6.64}$$

$$a(t) = a_i \exp\left[\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\frac{m}{M_{\rm pl}}\phi_i(t - t_i) - \frac{m^2}{4\sqrt{6}}(t - t_i)^2\right] \tag{6.65}$$

となる．この解が実際に宇宙膨張の時間スケール H^{-1} に比べて十分小さいことを見てみよう．

$$\frac{\dot{\phi}/\phi}{H} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{M_{\rm pl}^2}{\phi^2} \tag{6.66}$$

したがって $\phi > M_{\rm pl}/\sqrt{4\pi}$ ならば，スローロール近似が成り立ち，宇宙は近似

的に指数関数的に膨張することが分かる．インフラトン場の値が空間上でランダム分布をもち，プランク質量よりも大きな値をもった領域がインフレーションを起こす．

問題： $V = \lambda\phi^4$（λ は定数）というポテンシャルでもインフレーションが起こることを示せ．

宇宙が何倍に膨張するかは，次の e-holding と呼ばれる量

$$N \equiv \ln \frac{a_{\rm end}}{a} = \int_t^{t_{\rm end}} H dt = \int_\phi^{\phi_{\rm end}} \frac{H}{\dot\phi} d\phi \tag{6.67}$$

を計算すればよい．スローロール近似を用いると

$$N \simeq \frac{8\pi}{M_{\rm pl}^2} \int_{\phi_{\rm end}}^{\phi} \frac{V}{V_{,\phi}} d\phi \tag{6.68}$$

今，考えているモデルでは

$$N \simeq \frac{2\pi}{M_{\rm pl}^2} \left(\phi^2 - \phi_{\rm end}^2\right) \tag{6.69}$$

となるから，$\phi_{\rm end} \simeq M_{\rm pl}$ として $\phi \geq 3M_{\rm pl}$ 程度の領域がインフレーションを起こせば $N \geq 60$ を実現することが分かる．

インフレーションモデルはインフラトンのポテンシャルの取り方や，インフラトン場を複数想定するなどで，多くのモデルが存在する．実際の宇宙でどのモデルが実現されているのかは分かっていない．

6.3.3 宇宙の再加熱

上に考えたモデルではインフラトン場が $\phi \simeq M_{\rm pl}/\sqrt{4}$ 以下になるとインフラトンの運動は原点に急速に落ち込みインフレーション期が終了する．その後，インフラトンは原点周りを振動する．このような状況ではインフラトンと相互作用をもつほかの場が励起され，インフラトンの振動エネルギーを奪い最後には放射に変わり宇宙を再加熱する（指数関数的な膨張によって宇宙の温度は断熱的に下がっている）．これを宇宙の再加熱と呼ぶ．この再加熱がビッグバン宇宙論のビッグバンに対応する．再加熱によって宇宙の温度がどの程度まで上昇するかははっきりとは分かっていないが，グラビティーノを過剰に生成しないなどの理由から大統一理論が実現される温度よりかなり低いと考えられてい

る．後で述べるようにインフレーション起源の重力波を観測することでインフレーションが起こったエネルギースケールを決めることができる．

6.4 密度揺らぎの生成

インフレーション理論はビッグバン理論では初期条件として設定せざるを得なかった宇宙の一様・等方性を説明することができるが，さらに現在の宇宙に観測される構造の起源をインフラトンの量子揺らぎとして説明することができる．

インフレーション膨張中のインフラトン場の量子揺らぎを計算してみよう．

$$\delta\phi \equiv \phi - \bar{\phi} \tag{6.70}$$

として，$\bar{\phi}$ をスローロール近似に従う古典場とする．すると揺らぎ $\delta\phi$ に対する方程式は以下のようになる．

$$\ddot{\delta\phi} + 3H\dot{\delta\phi} + \left(-\nabla^2 + 3H_{\phi}\dot{\bar{\phi}} + V_{,\phi\phi}\right)\delta\phi = 0 \tag{6.71}$$

となるが，スローロール近似を行うと，この式は次のようになる．

$$\ddot{\delta\phi} + 3H\dot{\delta\phi} - \nabla^2\delta\phi = 0 \tag{6.72}$$

ここで背景場の 2 階微分を無視した．以下，簡単のためにインフレーション中の時空をハッブルパラメーター一定のド・ジッター時空として近似しよう．

$$ds^2 = e^{2Ht}(-d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{6.73}$$

ここで η は共形時間と呼ばれ次式で定義される．

$$\eta = \int_{-\infty}^{t} \frac{dt}{a(t)} = -\frac{1}{He^{Ht}} \tag{6.74}$$

インフラトン場 $\delta\phi$ から

$$\psi = a\phi \tag{6.75}$$

として新たに場 ψ を定義すると，この場は次の式を満たす．

$$\left(\eta^{\mu}\partial_{\mu}\partial_{\nu} - \frac{2}{\eta^2}\right)\psi = 0 \tag{6.76}$$

通常の場の量子化に従って，インフラトン場を次のようにフーリエ展開する．

$$\delta\phi(t,\vec{x}) = \int \left(a_{\vec{k}} f_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{k}}^{\dagger} f_{\vec{k}}^{*}(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right) \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \tag{6.77}$$

ここで展開係数 $a_{\vec{k}}$ は次の交換関係

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^{\dagger}] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \tag{6.78}$$

を満たす生成，消滅演算子である．モード関数 f は次の方程式に従う．

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + k^2 - \frac{2}{\eta^2} \right) (f_k) = 0 \tag{6.79}$$

この式は容易に解けて

$$f_k(\eta) = \frac{k}{\eta} \left[(C_1 + k\eta C_2) \cos(-k\eta) + (C_2 - k\eta C_1) \sin(-k\eta) \right] \tag{6.80}$$

ここで係数 C_1, C_2 は以下のような考察から決めることができる．今，宇宙膨張を無視できるような地平線半径よりも十分短いスケールを考えよう．

$$-k\eta = \frac{k}{Ha(t)} \tag{6.81}$$

だから，この比は波長とハッブル地平線の逆比となる．したがって $|k\eta| \gg 1$ の極限では宇宙膨張が無視できてミンコフスキー時空における場の量子化と同じになると考えることができる．このとき

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta} \tag{6.82}$$

となるので，

$$C_2 = \frac{k^2}{\sqrt{2k}},\ C_1 = -iC_2 \tag{6.83}$$

こうしてモード関数として次式が得られる．

$$f_k(\eta) = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\eta} \right) \tag{6.84}$$

したがって場 $\delta\phi$ の 2 乗は

$$|\delta\phi_k|^2 = \frac{|\psi_k|^2}{a^2} = \frac{H^2}{2k^3}(1 + k^2\eta^2) \tag{6.85}$$

インフレーション膨張によって揺らぎは，生成された途端にハッブル地平線（今の場合，一定値 H^{-1}）を超えていく．したがって地平線を超えた揺らぎ（$|k\eta| \ll 1$）

に対しては

$$|\phi_k|^2 \simeq \frac{H^2}{2k^3} \tag{6.86}$$

となる．この揺らぎによって各点の膨張に差ができ，平均より大きく膨張した領域の密度は薄く，小さく膨張した領域の密度は高くなる．こうして密度揺らぎがつくられる．(6.67) から，この差は膨張の差として次のように表される．

$$\delta N \simeq \frac{H}{\dot{\phi}}\delta\phi \tag{6.87}$$

地平線を超えた揺らぎの進化は座標系の選択によって様々な表現が存在する．詳細は一般相対論的な摂動論を用いる必要があるが，ここでは単にこの量 δN が揺らぎが地平線を超えている場合には座標系の選択によらない不変量であること，密度揺らぎによる空間曲率の揺らぎは δN で書けることを認めよう．後者に関しては e-holding の定義から有効スケール因子は $a(t)e^N$ と書けるので N の揺らぎ δN は

$$a(t)e^{N+\delta N} \simeq a(t)e^N(1+\delta N) \tag{6.88}$$

となり，δN 部分を空間の曲率揺らぎと考えることができる．したがってこの無次元化されたパワースペクトルは

$$\Delta_\Psi(k) = \frac{k^3}{2\pi^2}P_\Psi = \left(\frac{H^2}{2\pi|\dot{\phi}|}\right)^2 \tag{6.89}$$

となる．

エネルギー密度に非等方成分がなければ空間曲率は密度揺らぎによるニュートンポテンシャル Ψ に等しいことが示される．ニュートンポテンシャルは，ポアッソン方程式

$$k^2\Phi = \frac{3}{2}H^2a^2\delta_k \tag{6.90}$$

を満たすので，$\delta_k \propto k^2\delta N$ となり，密度揺らぎのパワースペクトルは次のように与えられる．

$$P_\delta(k) = \langle\delta_k\rangle \propto k^4\langle|\delta N_k|^2\rangle \propto k \tag{6.91}$$

ここでインフレーション中では $\dot{\phi}$ や H はほぼ一定とみなせることを用いた．こうしてインフレーションによってつくられた密度揺らぎとして，ハリソン–ゼルドビッチスペクトルが得られる．実際には上の議論で無視した効果（インフ

ラトンの質量，ハッブルパラメータの時間変化など）によってハリソン–ゼルドビッチスペクトルからわずかにずれる．一般にハリソン–ゼルドビッチからのずれをスペクトル指数として次のように定義する．

$$n_s - 1 = \frac{d\ln\Delta_\Phi^2}{d\ln k} \tag{6.92}$$

これより一般のポテンシャルに対して，次のパラメータ ϵ, η を定義する．

$$\epsilon = \frac{M_{\rm pl}^2}{2}\left(\frac{V(\phi)_{,\phi}}{V(\phi)}\right)^2,\ \eta = M_{\rm pl}^2\frac{V(\phi)_{,\phi,\phi}}{V(\phi)} \tag{6.93}$$

これらのパラメータはスローロールパラメータと呼ばれ，スローロール近似が成り立つためには，これらのパラメータの値が 1 に比べて十分小さい必要がある．スペクトル指数をスローロールパラメータの 1 次まで計算すると次の式が得られる．

$$n_s = 1 - 6\epsilon + 2\eta \tag{6.94}$$

2013 年 3 月の時点では $n_s \simeq 0.96$ が得られている．一部のモデルを除いてインフラトンが適当なポテンシャルをもつインフレーションモデルは，この制限に矛盾しない予言をする．

6.4.1 重力波の生成

スカラー場だけでなくあらゆる場や時空自身も量子揺らぎを起こす．時空の揺らぎはメトリックテンソルの揺らぎとして表される．インフレーション時の量子揺らぎを起源として重力波が生成される．重力波はメトリックテンソルの空間部分の揺らぎとして次のように表される．

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[-d\eta^2 + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j\right] \tag{6.95}$$

ただし h_{ij} は次の条件を満たす．

$$h^{ij}_{\ ,j} = h^i_i = 0 \tag{6.96}$$

ここでは詳しく述べないがメトリックの揺らぎには空間座標の変換のもとでスカラー，ベクトル，テンソルとして振舞う 3 種類（モード）がある．重力波はテンソルモードである．スカラーモードはインフラトン場の揺らぎと組み合わせて扱うことができて上の解析と同じ結果となる．またベクトルモードは減

衰することが知られており，通常無視される．

重力波 h_{ij} の独立成分は条件から 2 個になり 2 つの偏光成分を表す．そこで偏光ベクトル e^{+}_{ij}, e^{x}_{ij} $(e^i_i = e^{ik}k^j = 0)$ を導入して次のようにフーリエ展開しよう．

$$h_{ij}(\eta, \vec{k}) = \int \sum_{s=+,x} e^s_{ij} h^s_{\vec{k}}(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \tag{6.97}$$

さらにインフラトン場と同様に $v^s_k(\eta) = h^s_k(\eta)$ とすると，v^s_k に対する方程式は，アインシュタイン方程式を h_{ij} について線形化して

$$(v^s_k)'' + \left(k^2 - \frac{2}{\eta^2}\right) = 0 \tag{6.98}$$

となってインフラトン場と全く同じになる．したがってインフラトン場と全く同様に量子化されてスペクトルを計算することができる．ただしメトリックは無次元なのでスカラー場と同じ次元をもたせるにはプランク質量 $M_{\rm pl}$ を用いて，次のようにテンソル場を定義する．

$$h^s_k = \frac{2v^s_k}{aM_{\rm pl}} \tag{6.99}$$

係数 2 は重力場の作用を h_{ij} について 2 次まで展開したとき，その形がスカラー場の作用に等しくなるようにして決めた．こうしてテンソルモード（重力波）の無次元化されたパワースペクトルは

$$\Delta^2_T(k) = \frac{8}{M^2_{\rm pl}}\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \tag{6.100}$$

となる．

スカラーモードとテンソルモードの比を

$$r \equiv \frac{\Delta^2_T(k)}{\Delta^2_\Phi(k)} \tag{6.101}$$

と書くと，$\Delta^2_\Phi(k)$ は，10^{-9} 程度の k に依存しないほぼ一定値になり，またインフレーション時には $H^2 \simeq (8\pi/3)V/M^2_{\rm pl}$ だから

$$V^{1/4} \equiv M_{\rm inf} \simeq \left(\frac{r}{10^9}\right)^{1/4} M_{\rm pl} \tag{6.102}$$

となって，この比 r はインフレーションが起こるエネルギースケールを直接与えることが分かる．2013 年 3 月現在の観測は $r < 0.13$ が得られている．2013

年に公表された Planck 衛星の観測では，$r < 0.12$ となっていて，これからインフレーションのスケールとして次の上限が得られている．

$$M_{\text{inf}} \leq 1.9 \times 10^{16}\,\text{GeV} \tag{6.103}$$

6.4.2 インフレーションモデルの検証

ではインフレーション理論はそもそも検証できるのであろうか．あるいはインフレーション理論には，どのようなインフラトンを考えるかで無数に近いモデルがあり，そのうちのどれが正しいのかを決めることができるのだろうか．

インフレーション理論を検証，あるいは多数のインフレーションモデルを区別するには，その予言を観測で確かめる必要がある．たとえばインフレーション理論は密度揺らぎや重力波の生成とそのスペクトルを予言する．宇宙マイクロ波背景放射の温度揺らぎの観測は，これらの予言の検証が目的の1つである．最近の Planck 衛星の観測では原始パワースペクトルの指数に対して次のような値が報告されている．

$$n_s \simeq 0.9624 \tag{6.104}$$

この値である種のインフレーションモデルが棄却される（例として上にあげた ϕ^2 カオティックモデルも棄却される）．しかし，この制限に矛盾しない多くのインフレーションモデルが多数存在する．今後，期待されている観測は温度揺らぎの統計的な性質，とくにガウス的な揺らぎからのずれと偏光の観測である．とくに偏光の観測はインフレーション時でつくられた初期重力波の情報をもたらすため，日本でもその観測が計画されている．

A 付録　一般相対性理論

ここで本書の理解に必要な範囲で一般相対性理論を説明しておく．より進んで一般相対性理論を勉強したい読者は巻末にあげた教科書を参照してほしい．

A.1　等価原理と時空の曲がり

一般相対性理論では，重力を時空の曲がり，曲率としてとらえる．それはほかの力にはない重力の特徴である等価原理から導かれる．そこでまず等価原理を説明しよう．等価原理というのは，重力以外の力が働かない自由落下において，加速度は物体の質量，組成によらないということである．この原理は，有名なガリレオのピサの斜塔の実験によって明瞭な形で表すことができる．この実験は実際には行われなかったし，また等価原理はすでによく知られていたようである．物体の質量には慣性質量 M_I，重力質量 M_G の 2 種類がある．重力質量は電磁気力の場合の電荷に対応するもので，重荷と呼んだ方が適切であり，概念の違いも分かりやすい．重力加速度を g として，運動方程式の鉛直下方の成分しかもたず，それは

$$M_I a = M_G g \tag{A.1}$$

と書ける．等価原理が成り立っているということは $M_I = M_G$ ということで，これは慣性質量と重力質量が等価であることをいっている．

このことから局所的には重力は加速度と同等であり，重力加速度と同じ強さの加速度運動をすることによって重力場と同じ環境が実現される．あるいは自由落下することによって重力を消すことができる．有名なアインシュタインのエレベータの実験がそれである．ワイヤーが切れて自由落下しているエレベー

タの中では，あらゆるものが同じ加速度で落下するので重力が消えたように感じる．ただし詳細に見ると物体は地球の重心に向かって落下しており空間的に離れた 2 点間の距離は落下するにつれほんのわずかではあるが変化する．これは地球重力の潮汐力の効果であり，加速度運動でも消すことができない．したがってこれが真の重力の効果である．潮汐力をニュートン重力の立場で求めてみよう．今，時刻 t に位置 $x(t)$ と $x(t)+\delta x(t)$ にある 2 つの質点を考える．それぞれの運動方程式は，重力ポテンシャルを ϕ とすると

$$\ddot{x}^i(t) = -\partial_i \phi(x) \tag{A.2}$$

$$\ddot{x}^i(t) + \delta \ddot{x}^i(t) = -\partial_i \phi(x+\delta x) \tag{A.3}$$

2 番目の式の右辺をテーラー展開して最初の式を引くと

$$\delta \ddot{x}^i(t) = -\partial_i \partial_j \phi(x) \delta x^j \tag{A.4}$$

したがって重力ポテンシャルの 2 階微分，潮汐力が加速度系に移っても消すことのできない重力の真の効果を表している．

A.1.1 曲がった時空のメトリック

潮汐力は，各事象ごと自由落下系が違っているために現れる力である．アインシュタインはこのことを時空が曲がっていると解釈した．時空が曲がっているため時空全体をおおうような大域的な慣性系は存在しない．時空の曲がりが無視できるような十分小さな領域だけで慣性系を設定できる．このような慣性系を局所慣性系という．局所慣性系では特殊相対論が成り立つから近傍の 2 事象 p, q 間の 4 次元的な距離の 2 乗（線素）は次のように書ける．

$$ds^2 = -(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 \equiv \eta_{ab} dX^a dX^b \tag{A.5}$$

ここで dX^a $(a=0,1,2,3)$ は 2 つの事象間の座標の差である．また下付き添え字と上付き添え字がそろったときは，その添え字について 0 から 3 まで和をとるというアインシュタインの規約を使った．η_{ab} は対角要素が $(-1,1,1,1)$ で，それ以外の成分がすべて 0 のミンコフスキーメトリックである．

局所慣性系ではない一般の座標系でこの 2 事象の座標の差を dx^μ と書くと，局所慣性系（X）と一般座標系（x）の間には次の関係がある．

$$dX^a(x) = \frac{\partial X^a}{\partial x^\mu} dx^\mu \equiv e^a_{\ \mu}(x) dx^\mu \tag{A.6}$$

ここで e^a_μ を慣性系と一般座標系を結ぶ変換行列という．したがって 4 次元線素は座標系 (x) では以下のように書ける．

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \tag{A.7}$$

ただし

$$g_{\mu\nu}(x) = e^a_{\ \mu}(x) e^b_{\ \nu}(x) \eta_{ab} \tag{A.8}$$

これをメトリックテンソルという．一般に曲がった時空の線素は近傍の 2 事象間の座標の差の 2 次関数として上のように書くことができる．このような幾何学をリーマン幾何学という．

A.1.2　曲がった時空のテンソル

ここでは曲がった時空におけるベクトル（反変ベクトルともいう）$\vec{A}$ はその成分 A^μ が (A.6) と同じ変換則で局所慣性系での成分 A^a と結びついている 4 成分量として定義する．

$$A^a = e^a_{\ \mu} A^\mu \tag{A.9}$$

この逆の変換で定義される 4 成分量 B_μ を 1 形式（あるいは共変ベクトル）といい，しばしば $\tilde{B}$ と書かれる．

$$B_a = e^\mu_{\ a} B_\mu \tag{A.10}$$

ここで $e^\rho_{\ a}$ は $e^b_{\ \nu}$ の逆行列である．

$$e^a_{\ \mu} e^\nu_{\ a} = \delta^\nu_\mu,\ e^a_{\ \mu} e^\mu_{\ b} = \delta^a_b \tag{A.11}$$

一般の曲がった時空のテンソルはベクトルや 1 形式の場合から類推されるように，その $4^n \times 4^m$ 個の成分が次のように対応する局所慣性系での成分から定義される．

$$A^{\mu_1 \cdots \mu_n}{}_{\nu_1 \cdots \nu_m} = e^{\mu_1}_{\ a_1} \cdots e^{\mu_n}_{\ a_n} e^{b_1}_{\ \mu_1} \cdots e^{b_m}_{\ \nu_m} A^{a_1 \cdots a_n}{}_{b_1 \cdots b_m} \tag{A.12}$$

このように n 個の上付き添え字，m 個の下付き添え字を持ったテンソルを (n,m) テンソル，あるいは単に $n \times m$ 階テンソルという．次のような (n,m) テンソ

ルから $(n-1, m-1)$ テンソルをつくる操作を縮約という.

$$A^{\mu_1\cdots\mu_{i-1}\mu_{i+1}\cdots\mu_n}{}_{\nu_1\cdots\nu_{i-1}\nu_{i+1}\cdots\nu_m} = A^{\mu_1\cdots\mu_{i-1}\rho\mu_{i+1}\cdots\mu_n}{}_{\nu_1\cdots\nu_{i-1}\rho\nu_{i+1}\cdots\nu_m} \tag{A.13}$$

メトリックテンソルは上付き添え字と下付き添え字の対応を与える.

$$B_\mu = g_{\mu\nu} B^\nu \tag{A.14}$$

また次のベクトル同士の積（スカラー積）が定義される.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A_\mu B^\mu \tag{A.15}$$

ベクトルの大きさを次のように定義する.

$$A^2 \equiv g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = A^\mu A_\mu \tag{A.16}$$

これはスカラーであるから，特殊相対性理論の場合と同様にベクトルは大きさが正（空間的ベクトル），負（時間的ベクトル），ゼロ（ヌルベクトル）の 3 通りに分類することができる.

A.1.3 固有時間と重力赤方偏移

ベクトルの応用として重力赤方偏移を考えよう．そのためにまず粒子の 4 元速度を定義しておこう．今，ある粒子の運動の軌跡（世界線）γ を考える．この世界線 γ 上の点と実数 λ のある値を 1 対 1 に対応させる．したがって，たとえば世界線上の点 p に対応する値が λ_p とすれば，$x^\mu(p) = x^\mu(\lambda_p)$ となる．ただし点 p の座標を $x^\mu(p)$ と書いた．そこで世界線を表す式を $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ と書いて，x^μ を λ の関数と考える．このときこの世界線の接線ベクトルは次のように書ける.

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \tag{A.17}$$

これが上で定義したベクトルであることは，局所慣性系で同じ世界線を $X^a = X^a(\lambda)$ と書いてみればすぐ分かる．ここでパラメータとして固有時間 τ をとる．これは粒子が静止して見える系（共動座標系）での時間である．したがって以下のように書ける.

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{A.18}$$

固有時間をパラメータにとったので 4 元速度は以下のように規格化されている.

$$U^2 = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -1 \tag{A.19}$$

ただし今は世界線として接線ベクトルがいたるところ時間的なものを考えている．接線ベクトルがヌルな世界線では固有時間は定義できない．

共動座標系をとれば粒子の世界線に沿って $dx^i = 0$ だから，座標時間 t と固有時間の間には次の関係がある．

$$d\tau = \sqrt{-g_{00}}\, dt \tag{A.20}$$

したがって重力場が強い（$|g_{00}|$ が小さい）ところほど固有時間の進みは遅いことになる．この関係から重力赤方偏移を導くことができる．今，遠方の光源 S が固有時間 $\Delta\tau_S$ の間に振動数 ν_S の光を N 波長だけ放射したとする．そして観測者 O が固有時間 $\Delta\tau_O$ の間にその N 波長を振動数 ν_O で受け取ったすると，

$$N = \nu_S \Delta\tau_S = \nu_O \Delta\tau_O \tag{A.21}$$

が成り立つから

$$\nu_O = \frac{\sqrt{-g_{00}(S)}}{\sqrt{-g_{00}(O)}}\, \nu_S \tag{A.22}$$

となる．ここで $g_{00}(O), g_{00}(S)$ はそれぞれ観測者，光源での g_{00} の値である．こうして重力場が強い（g_{00} が小さい）ところから来た振動数が小さく，すなわち波長が長く観測される．これを重力赤方偏移という．

A. 2　測地線方程式と共変微分

曲がった時空で重力以外の力を受けていない粒子の運動方程式を次のようにして導くことができる．局所慣性系では特殊相対性理論が成り立つから自由粒子は等速直線運動を行う．したがって粒子の世界線を $X^a = X^a(\tau)$ と書くと，運動方程式は次のように書ける．

$$\frac{dU^a}{d\tau} = 0 \tag{A.23}$$

ここで U^a は粒子の 4 元速度である．

この運動方程式を一般座標系 (x) で表してみる．まず 4 元速度を一般座標系で表す．粒子の世界線上の任意の点は局所慣性系では $X^a(\tau)$，一般座標系では

$x^\mu(\tau)$ と表されるから

$$U^a = \frac{dX^a}{d\tau} = \frac{\partial X^a}{\partial x^\mu} U^\mu \tag{A.24}$$

したがって

$$0 = \frac{d}{d\tau}\left(e^a_\mu U^\mu\right) = e^a_\mu \frac{dU^\mu}{d\tau} + \frac{de^a_\mu}{d\tau} U^\mu \tag{A.25}$$

となるが，ここで τ 微分が世界線に沿った微分であるから

$$\frac{de^a_\mu}{d\tau} = U^\nu \frac{\partial e^a_\mu}{\partial x^\nu} = U^\nu \frac{\partial^2 X^a}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \tag{A.26}$$

こうして重力場中の粒子の運動方程式は以下のように書くことができる．

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} U^\nu U^\rho = 0 \tag{A.27}$$

これを測地線方程式という．ここで

$$\frac{\partial e^a_\mu}{\partial x^\nu} \equiv \Gamma^\rho_{\mu\nu} e^a_\rho \tag{A.28}$$

とおいた．この $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ をクリストッフェル記号という．これは 3 つの添え字をもっているが 3 階のテンソルではない．また下の添え字について対称であることは，

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = e^\rho_a \frac{\partial e^a_\mu}{\partial x^\nu} = e^\rho_a \frac{\partial^2 X^a}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \tag{A.29}$$

であることから分かる．

さらにメトリックテンソルの定義を使うと，

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} + \Gamma^\sigma_{\rho\nu} g_{\mu\sigma} \tag{A.30}$$

これからクリストッフェル記号はメトリックテンソルの微分で次のように書けることが分かる．

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right) \tag{A.31}$$

次の公式は覚えておくと便利である．

$$\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} \tag{A.32}$$

ここで $g = \det(g_{\mu\nu})$ はメトリックテンソルを 4 行 4 列の行列としたときの行列式である．

測地線方程式を

$$U^\nu \nabla_\nu U^\mu = 0 \tag{A.33}$$

と書いてベクトルに対する共変微分を定義する．

$$\nabla_\nu A^\mu = \partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} A^\rho \tag{A.34}$$

曲がった時空では事象が違えば，そこでの変換行列が違うためテンソルの変換性が違う．したがって違った2点でのテンソルの差や和は，テンソルとして振舞わない．このことはテンソルの微分がテンソルにならないことを意味する．一般相対性理論の基本原理は，一般座標変換に対する共変性，すなわちどの座標系で記述しても物理法則の形は変わらないことである．したがって（物理法則が微分方程式で表されることから）テンソルの微分がテンソルになるような微分操作（共変微分）が必要になる．変換行列の微分，あるいはクリストッフェルの記号がまさにそれを与えてくれるのである．共変微分の記法として，∇ のほかにセミコロン ; もしばしば用いられる．セミコロンを使うと測地線方程式は次のように書ける．

$$U^\nu U^\mu_{;\nu} = 0 \tag{A.35}$$

同様にして下付き添え字をもった量に対する共変微分も次のように定義される．

$$\nabla_\nu B_\mu = \partial_\nu B_\mu - \Gamma^\rho_{\nu\mu} B_\rho \tag{A.36}$$

ここでは $e^a_\mu e^\nu_a = \delta^\nu_\mu$ から導かれる以下の関係を使った．

$$\frac{\partial e^\mu_a}{\partial x^\nu} = -\Gamma^\mu_{\nu\rho} e^\rho_a \tag{A.37}$$

上の定義から一般のテンソルの共変微分も同様にして求められる．たとえば

$$\nabla_\alpha T^\mu_\nu = \partial_\alpha T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\alpha\rho} T^\rho_\nu - \Gamma^\rho_{\nu\alpha} T^\mu_\rho \tag{A.38}$$

とくにメトリックテンソルの共変微分は恒等的に0になることが分かる．

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0 \tag{A.39}$$

次の共変微分の発散はしばしば現れるので，覚えておくとよい．

$$A^\mu_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} A^\mu \right)$$

$$A^{\nu}_{\mu\,;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\sqrt{-g}A^{\nu}_{\mu}\right) - \frac{1}{2}g_{\nu\rho,\mu}A^{\nu\rho} \tag{A.40}$$

下の式からもし A が反対称テンソル $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$ ならこの式で右辺最後の項は存在しない.

A.3 ニュートン極限

ニュートン的な状況で測地線方程式が実際にニュートンの運動方程式を与えることを見ておこう. ニュートン的な状況とは運動の速度が光速度に比べて十分小さく, そして時空がほぼ平坦であることである. すなわちメトリックテンソルを

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{A.41}$$

と書いたとき, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ であり, h の 2 次以上を無視できることである. このとき固有時間は 3 次元速度を $v^i = dx^i/dt$ とすると

$$d\tau^2 = -(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^{\mu}dx^{\nu} = dt^2(1 - v^2) - h_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \tag{A.42}$$

であるから, v^2 と h のオーダーを無視すると, $d\tau = dt$ ととることができる. したがって最低次の近似で 4 元速度は

$$U^{\mu} = (1, v^i) \tag{A.43}$$

となる. すると測地線方程式の空間成分は

$$\frac{d}{dt}v^i + \Gamma^i_{00} = 0 \tag{A.44}$$

と近似できる. クリストッフェル記号は

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2}\delta^{ij}\left(2g_{j0,0} - g_{00,j}\right) \tag{A.45}$$

となるが, 運動の速度が光速度に比べて十分小さいため, 時間微分は空間微分に比べて無視できる. 実際, ある量 Q が時間的, 空間的に変化するスケールを, それぞれ T, L として, この量の時間微分と空間微分を比べてみると

$$\frac{Q_{,0}}{Q_{,i}} \simeq \frac{L}{T} \simeq v \ll 1 \tag{A.46}$$

こうして上のクリストッフェル記号の右辺第1項は無視することができる．

$$\frac{d}{dt}v^i = \frac{1}{2}\delta^{ij}h_{00,j} \tag{A.47}$$

したがって ϕ をニュートンポテンシャルとして

$$h_{00} = -2\phi \tag{A.48}$$

ととれば，重力場 ϕ 中でのニュートンの運動方程式が導かれる．

A.4 曲率テンソル

時空が曲がっていると，時空全体をおおうような大域的な慣性系をとることができない．しかし時空の1点では常に局所慣性系がとれるため，線素だけの情報では，時空が曲がっているかどうかは分かりにくい．1点だけで時空が曲がっているかどうかを判断できるテンソル量がないだろうか．テンソルは座標系の変換に対して線形変換する量なので，1点ですべての成分がゼロであれば，いたるところで0になる．したがって局所慣性系でもすべての成分がゼロにならない時空の曲がりを表すテンソルを探してみよう．そのために最初に述べた真の重力の効果である潮汐力に注目しよう．そこでニュートン力学と同様に，世界線 $x^\mu(\tau)$ と $x^\mu(x) + dx^\mu(\tau)$ を運動する2つの測地線を考える．

$$\frac{d^2}{d\tau^2}x^\mu + \Gamma^\mu_{\rho\nu}(x)\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$
$$\frac{d^2}{d\tau^2}(x^\mu + \eta^\mu) + \Gamma^\mu_{\rho\nu}(x+\eta)\frac{d(x^\nu + \eta^\nu)}{d\tau}\frac{d(x^\rho + \eta^\rho)}{d\tau} = 0$$

下の式から上の式を引き，微少量 η の1次まで残すと以下の式が得られる．

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\eta^\mu + \eta^\rho\partial_\rho\Gamma^\mu_{\sigma\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} + 2 + \Gamma^\mu_{\rho\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{d\eta^\rho}{d\tau} = 0 \tag{A.49}$$

この式をテンソル方程式に書けばよい．そのために $d/d\tau = U^\mu\partial_\mu$ 微分を共変微分

$$\frac{D}{D\tau} \equiv U^\mu\nabla_\mu \tag{A.50}$$

に置き換えて上の式を書き直せばよい．結果は

$$\frac{D^2}{D\tau^2}\eta^\mu = R^\mu_{\nu\alpha\beta}U^\alpha U^\nu\eta^\beta \tag{A.51}$$

となる．ここで

$$R^{\mu}_{\ \nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^{\mu}_{\beta\nu} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\nu} - \Gamma^{\mu}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}_{\alpha\nu} \tag{A.52}$$

この 4 階のテンソル $R^{\mu}_{\ \nu\alpha\beta}$ をリーマンテンソルといい，時空が曲がっているかどうかを判定する望みのテンソルである．

この式のニュートン極限をとってみれば，実際に最初に示したニュートンの潮汐力の式が出てくることが分かる．

リーマンテンソルは 4 階のテンソルで $4^4 = 256$ 個の成分をもっているが，以下のような添え字についての対称性があるので，すべてが独立ではない．

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= R_{\mu\nu\alpha\beta} \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} &+ R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} = 0 \end{aligned} \tag{A.53}$$

これらの対称性は独立ではなく 1 つはほかの 2 つの対称性から導くことができる．また最初の対称性からリーマンテンソルを R_{AB} と書けば，添え字 $A = (\alpha\beta)$, $B = (\mu\nu)$ のとり得る場合の数は 6 個（4 次元の場合）だから，R_{AB} は 6 次元空間の対称テンソルとみなすことができる．したがって独立な成分は 21 個となるが，最後の対称性から 1 つ減って，結局リーマンテンソルの独立な成分の数が 20 個であることが分かる．

リーマンテンソルは上の対称性のほかにビアンキの恒等式と呼ばれる微分恒等式を満たす．

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0 \tag{A.54}$$

この恒等式で α と μ をそろえて一回縮約すると

$$R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R^{\alpha}_{\beta\nu\lambda;\alpha} = 0 \tag{A.55}$$

さらに β と ν で縮約すると

$$R_{;\lambda} - 2R^{\beta}_{\lambda;\beta} = 0 \tag{A.56}$$

が得られる．ここで

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} \\ R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{A.57}$$

をそれぞれリッチテンソル，リッチスカラーという．

縮約されたビアンキ恒等式は次のようにも書くこともできる．

$$G^{\alpha}_{\mu;\alpha} = 0 \tag{A.58}$$

ここで

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{A.59}$$

これをアインシュタインテンソルという．

A.5　アインシュタイン方程式

時空が曲がっていることをアインシュタインが認識したのは1910年頃で，最終的に一般相対性理論にたどり着くまでにはそれから数年かかっている．その間，アインシュタインは物質の分布から重力場を決める式を探していた．紆余曲折の結果たどり着いたのが，今日アインシュタイン方程式と呼ばれる以下の式である．

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{A.60}$$

この式の左辺はアインシュタインテンソルである．右辺の $T_{\mu\nu}$ は物質のストレス・エネルギーテンソルと呼ばれる2階のテンソルである．

アインシュタイン方程式にたどり着くには，まずニュートンの重力理論で重力場の方程式がどうだったかを知る必要がある．それはポアッソン方程式で与えられる．

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \tag{A.61}$$

ここで Δ はラプラシアン，G は重力定数，そして ρ は物質の質量密度である．まずニュートン極限でこの式に帰着しなければならない．この式を見ると左辺はニュートンポテンシャルの2階微分である．ニュートン極限ではメトリックの g_{00} 成分が

$$g_{00} = -1 - 2\phi \tag{A.62}$$

と書けていたことから左辺はメトリックテンソルの2階微分であると予想できる．

A.5.1 ストレス・エネルギーテンソル

一方，右辺の質量密度であるが，特殊相対性理論から質量とエネルギーは等価だからエネルギー密度が重力源であることが分かる．またエネルギーはベクトルの時間成分であり，体積も座標変換で変わるからエネルギー密度は，ある 2 階のテンソル T の 00 成分 T^{00} であることが予想できる．この 2 階のテンソルがストレス・エネルギーテンソルである．ストレス・エネルギーテンソルの形は次のような考察から導くことができる．まず流体中のある素片（一体となって運動しているとみなせるくらい十分小さいが，流体として記述できるほど莫大な粒子数からなる領域）を考える．すると素片を特徴づける量はエネルギー密度 ρ，圧力 P，そして 4 元速度 U^μ である．次に素片が瞬間的に止まっているような座標系（瞬間静止系）を考える．この系ではストレス・エネルギーテンソルは以下の形をもつだろう．

$$T^{\bar{0}\bar{0}} = \rho,\ T^{\bar{1}\bar{1}} = T^{\bar{2}\bar{2}} = T^{\bar{3}\bar{3}} = P \tag{A.63}$$

添え字にバーをつけたのは，瞬間静止系を表すためである．したがって瞬間静止系でこの形に帰着する 2 階のテンソルを探せばよいことになる．瞬間静止系では 4 元速度は $U^{\bar{\mu}} = (1, 0, 0, 0)$ という成分をもつから

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu \tag{A.64}$$

とおくことが，まず考えられる（今，流体素片は十分小さく局所慣性系をとれているとする）．しかしこれだけでは圧力が出てこない．瞬間静止系で圧力は時間方向と直交する 3 次元空間内の量であるから，これを一般化する．そのために 4 元速度に垂直な 3 次元テンソルを考える．

$$h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu \tag{A.65}$$

というテンソルをつくってみると瞬間静止系で $h^{\bar{0}\bar{0}} = 0$, $h^{ij} = \delta^{\bar{i}\bar{j}}$ となって，瞬間静止系で圧力は

$$T^{\bar{i}\bar{j}} = Ph^{\bar{i}\bar{j}} \tag{A.66}$$

と書ける．したがって

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu + Ph^{\mu\nu} = (\rho + P)U^\mu U^\nu + Pg^{\mu\nu} \tag{A.67}$$

とおけば，瞬間静止系で望みの形になる．これがストレス・エネルギーテンソルの一般的な形である．ただしこの流体では粘性や熱伝導などは考えていない．ストレス・エネルギーテンソルがこの形の流体を完全流体と呼ぶ．

ストレス・エネルギーテンソルはエネルギーと運動量の流体中の分布を表しているが，外力がないかぎり流体全体としてはこれらは保存量である．この保存則を表すのが次の式である．

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{A.68}$$

この方程式が保存量を導くことは特殊相対論で示しておけば，それを一般座標系のテンソル関係式に直すことで示される．今，流体全体の 4 元運動量を次のように定義する（ここからは特殊相対論である）．

$$P^{\mu} \equiv \int_V T^{\mu 0} d^3x \tag{A.69}$$

積分は流体を囲む体積 V で行う．これを時間微分すると

$$\frac{dP^{\mu}}{dt} = \int_V T^{\mu 0}{}_{,0} d^3x = -\int_V T^{\mu k}{}_{,k} d^3x = -\int_S T^{\mu k} d^2S_k = 0 \tag{A.70}$$

ここで

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{A.71}$$

とストークスの定理を使った．表面積分は体積 V を囲む表面 S 上で行い，dS_k はその表面に垂直な面要素である．逆にいえば 4 元運動量の保存という事実があって，そのために上の形の保存則を満たす 2 階のテンソルが存在するということである．特殊相対論でのテンソル方程式を共変化（一般座標変換に対して形を変えない）するには，微分を共変微分にすればよい．

以上の考察から重力場の方程式として，次の形

$$E^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu} \tag{A.72}$$

におくことができる．ここで $E^{\mu\nu}$ はメトリックテンソルの 2 階微分を含む 2 階のテンソルで，右辺が $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ を満たすことから，このテンソルも

$$E^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{A.73}$$

を満たす．そこで縮約されたビアンキ恒等式

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{A.74}$$

を思い出すと，

$$E^{\mu\nu} = G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} \tag{A.75}$$

とおくことができる．後は，ニュートン極限をとったとき，ポアッソン方程式になるように定数 k を決めればよい．結果は，

$$G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu} \tag{A.76}$$

となる．これがアインシュタイン方程式である．最初に提案された式は Λ を含む項はなかったが，その後，静止宇宙をつくるため導入された．この項を宇宙項，Λ を宇宙定数という．本文で説明したように宇宙項は次の形のストレス・エネルギーテンソルとして取り入れることができるので，今後，アインシュタイン方程式としては宇宙項は考えない．

$$T^{\Lambda}_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \tag{A.77}$$

アインシュタイン方程式から，物質分布が決めているのはリッチテンソルであることが分かる．リッチテンソルは対称テンソルだから，4 次元ではその独立な成分の数は 10 個となる．一方，時空が曲がっているかどうかを決めているのは 4 階のリーマンテンソルで 20 個の独立な成分をもっている．したがって真空 $R_{\mu\nu} = 0$ であっても時空は曲がっている場合がある．たとえばブラックホールや重力波がその例である．時空の次元が 3 次元の場合，リーマンテンソルもリッチテンソルも同じく 6 個の独立な成分をもつので，3 次元時空でアインシュタイン方程式が成り立っていたとすると，真空解は平坦な時空しかないことになる．

アインシュタイン方程式は，メトリックテンソルに対する連立非線形偏微分方程式で，時空が球対称や軸対称の場合にしか解析的に解くことができない．しかしそのようなかぎられた場合でも物理的に興味のある様々な状況がある．そのような例として一様・等方時空を取り上げよう．

A.6 一様・等方空間

一様・等方空間とは空間のいたるところで空間の曲がりが同じで，特別な方

向が存在しないということである．これからメトリックテンソルの形を次のようにして決めることができる．まず等方性から，空間のどの点から見ても空間は等方的だから適当な点を原点にとろう．すると空間の任意の点は，原点からの距離 r と方向（適当にとった z 軸からの角度 θ と x 軸からの角度 ϕ によって指定できる．ここで動径座標 r を半径 r の球面の面積が $4\pi r^2$ になるように選ぶ．同じ半径 r にある点は球面上にあるとすれば，明らかに空間は等方的である．したがって空間の線素は次のように書けることが分かる．

$$d\ell^2 = e^{2f(r)}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{A.78}$$

このメトリックに対してリッチテンソルを計算すると

$$R_{rr} = \frac{2}{r}\frac{df}{dr},\ R_{\theta\theta} = 1 - e^{-2f} + re^{-2f}\frac{df}{dr},\ R_{\phi\phi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta} \tag{A.79}$$

これからリッチスカラーは

$$R = g^{ij}R_{ij} = \frac{2}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r\left(1 - e^{-2f}\right)\right] \tag{A.80}$$

となる．空間が一様であることから，空間の曲率はいたるところ同じ値をもつだろう．それを κ とおこう．すなわち $R = \kappa$ である．すると上の式はすぐに積分できて

$$e^{2f} = \frac{1}{1 - \frac{\kappa}{6}r^2 + \frac{A}{r}} \tag{A.81}$$

となる．A は積分定数である．この式で $r = 0$ とすると $e^{2f(0)} = 0$ となってしまい，原点が特別の点になってしまうが，空間の一様性からそんな点がないはずなので $A = 0$ となる．こうして 3 次元一様・等方空間の線素として以下の式が導かれる．

$$d\ell^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \tag{A.82}$$

ここで $K = \kappa/6$ とおき，2 次元球面の線素として $d\Omega^2$ を定義した．

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \tag{A.83}$$

K の意味は $R = 6K$ であることから，空間の曲率を与えることが分かり，$K > 0$ を閉じた空間，$K = 0$ を平坦な空間，$K < 0$ を開いた空間という．この意味は赤道面（$\theta = \pi/2$）を考えてみれば分かる．より具体的なことは本文中で説明

した．

次に一様・等方膨張宇宙の線素を考えてみよう．まずある時刻での空間部分は上で与えた線素で表される．違う時刻の空間部分は 3 次元空間が形を変えず変化することから，膨張を表す時間の関数 $a(t)$ を用いて次のように書けばよい．

$$d\ell^2(t) = a^2(t)d\ell^2 \tag{A.84}$$

$a(t)$ をスケール因子という．4 次元線素は，時刻 t 一定面（$dt = 0$）が上の形になることから一般に

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{0i}dtdx^i + a^2(t)d\ell^2 \tag{A.85}$$

と書ける．宇宙には銀河が散らばっていているが，時間座標として各銀河の固有時間をとろう．すると銀河の静止系では $dx^i = 0$ で，このとき固有時間の定義 $d\tau^2 = -ds^2 = g_{00}dt^2$ から

$$g_{00} = -1 \tag{A.86}$$

となる．次に各点 x^i にある銀河は自由落下しているとする．したがって銀河は宇宙膨張によって座標を変えない．このことは時間軸方向と空間軸方向が直交していることを意味する．時間軸方向の単位ベクトルを $\vec{e}_t$，空間軸方向の単位ベクトルを $\vec{e}_i$ とすると

$$g_{\mu\nu}e_t^\mu e_i^\nu = g_{0i} = 0 \tag{A.87}$$

となる．

こうして一様・等方膨張宇宙の 4 次元線素は次のように書けることが分かる．

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2d\Omega^2\right] \tag{A.88}$$

この線素で記述される時空を，ロバートソン–ウォーカー時空という．

こうして一様・等方性の要請からスケール因子以外のメトリック成分はすべて決定される．スケール因子の従う式はアインシュタイン方程式から求められる．リッチテンソルは

$$R_{00} = -3\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{\cdot} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]$$

$$R_{ij} = {}^{(3)}R_{ij} + \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^{\cdot} + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] g_{ij} \tag{A.89}$$

ここでドットは時間微分であり，${}^{(3)}R$ は 3 次元空間のリッチテンソルで次のようになる.

$$^{(3)}R_{ij} = \frac{2K}{a^2} g_{ij} \tag{A.90}$$

以上からアインシュタインテンソルを計算すると

$$\begin{aligned} G_{00} &= 3 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right] \\ G_{ij} &= - \left[2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^{\cdot} + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right] g_{ij} \end{aligned} \tag{A.91}$$

となって本文中のフリードマン方程式が導ける.

謝辞と参考文献

前書きでも触れたように宇宙論の取り扱う分野は広く，私の専門でない分野も含まれている．本書を書くにあたって東北大学天文教室の市川　隆氏，山田亨氏，大向一行氏，服部　誠氏，吉田志順氏，東京大学宇宙研究所の川崎雅裕氏，マックスプランク天体物理学研究所の小松英一郎氏にそれぞれの専門家の立場からご意見を伺ったり，色々質問させていただいた．この場を借りてこれらの方々に深く感謝を申し上げる．また学生の立場から東北大学天文教室の 4 年生羽田龍一郎君にも原稿を読んでもらって有益な指摘をしてもらい，感謝している．

第 4 章ではハーバード大学 A. Loeb 教授の著書から図を，そして第 5 章ではシカゴ大学 W. Hu 教授の講義ノートから図を引用させていただいた．掲載を快諾された両教授にお礼を申し上げる．

宇宙論の参考書，教科書は最近かなり多く出版されている．その中で本書の参考にしたもの，4 年や修士課程でゼミに使ったものにかぎって挙げておこう．文献 1 は本書よりもやさしく，基本的なことをさらに丁寧に書いてある．文献 2，3 は本書よりも若干程度が高い，宇宙論，相対論の専門家によるよい教科書である．文献 4，5 は天文学会 100 周年を記念して出版された天文学のほとんどの分野を網羅した全 15 巻からなるシリーズの宇宙論に関する 2 巻で現時点での宇宙論のほぼ全貌を見ることができる．文献 6 は宇宙論を含めた天文学の教科書で最近よくゼミで使われている．著者は本書で触れることのできなかった重力レンズの専門家で，重力レンズの基本的な事柄も書いてある．文献 7 も以前はゼミによく使われたが，今でもよい教科書である．文献 8 は現代宇宙論の標準的な教科書になっている．文献 9 は第 4 章の最後で少し触れた宇宙初期の銀河形成の最新の教科書である．文献 10 はかなり程度の高い宇宙論の教科書で，本書の程度をはるかに超えた詳細な記述があり，細かすぎて若干読みに

くいが読破すれば相当実力が付くだろう．日本語訳もある．文献 11 は第 5 章の記述で参考にした CMB の専門家による講義ノートである．

また本書の校正は筆者が Kavli IPMU（カブリ数物連携宇宙研究機構）に 4 ヵ月間の滞在中におこなった．Kavli IPMU と滞在を可能にしてくれた村山 斉機構長に感謝する．

最後に本書を書く機会を与えていただいた朝倉書店の編集部に感謝する．

文献

1) 二間瀬敏史，『なっとくする宇宙論』，講談社，1998.

2) 松原隆彦，『現代宇宙論』，東京大学出版会，2010.

3) 小玉英雄，『相対論的宇宙論』，丸善，1991.

4) 佐藤勝彦ほか編集，『宇宙論 I　第 2 版』（シリーズ天文学第 2 巻），日本評論社，2012.

5) 二間瀬敏史ほか編集，『宇宙論 II』（シリーズ天文学第 3 巻），日本評論社，2007.

6) P. Schneider, “Extragalactic Astronomy and Cosmology: An Introduction”, Springer, 2006.

7) T. Padmanabhan, “Structure Formation in the Universe”, Cambridge University Press, 1993.

8) S. Dotelson, “Modern Cosmology”, Academic Press, 2003.

9) A. Loeb and S. R. Furlanetto, “The First Galaxies in the Universe”, Princeton University Press, 2012.

10) S. Weinberg, “Cosmology”, Oxford University Press, 2008. [小松英一郎訳，『ワインバーグの宇宙論（上・下）』，日本評論社，2013.]

11) W. Hu, “Lecture Notes on CMB Theory: From Nucleosynthesis to Recombination”, arXiv:0802.3688, 2008.

索　引

欧　文

ア　行

カ　行

サ　行

タ　行

ナ　行

ハ　行

マ　行

ヤ　行

ラ　行

ワ 行

著者略歴

二間瀬敏史（ふたませとしふみ）

1953 年　北海道に生まれる
1983 年　ウェールズ大学カーディフ校博士課程修了
現　在　東北大学大学院理学研究科教授
Ph.D

現代物理学［基礎シリーズ］9
宇宙物理学

定価はカバーに表示

2014 年 3 月 25 日　初版第 1 刷

著　者　二　間　瀬　敏　史
発行者　朝　倉　邦　造
発行所　株式会社　朝　倉　書　店

東京都新宿区新小川町 6-29
郵 便 番 号　162-8707
電　話　03(3260)0141
F A X　03(3260)0180
http:// www.asakura.co.jp

〈検印省略〉

中央印刷・渡辺製本

ISBN 978-4-254-13779-8　C 3342　Printed in Japan